Phys. sp.
366

Phys. Sp. 366

Lambert

FT

<36622525740015

S

<36622525740015

Bayer. Staatsbibliothek

Merkwürdigste Eigenschaften der Bahn des Lichts durch die Luft

und überhaupt

durch verschiedene sphärische und concentrische Mittel,

nebst der Auflösung verschiedener Aufgaben, welche sich darauf beziehen, als die astronomische und Erdstrahlenbrechung und was davon abhängt,

durch

J. H. Lambert

aus dem Französischen übersetzt.

Mit Kupfern.

Berlin,
Bey Haude und Spener. 1772.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede,

welche

einige Anmerkungen über die Optic

enthält.

Wenn man die Optic in ihrem ganzen Umfange nimmt, so begreift sie zwey von einander ganz verschiedene Theile in sich. Der erste betrachtet die Bahn des Lichts, und die Erscheinungen, welche davon abhängen. Er schließt die eigentliche Optic, die Catoptric, die Dioptric und Perspectiv in sich. Diese Wissenschaften sind zu so

einem Grade der Vollkommenheit gebracht worden, daß nur noch eine bloße Nachlese übrig bleibet. Die Wirkungen, welche sich beym Sehen zeigen, waren zu wichtig, als daß man sich nicht hätte sollen angelegen seyn lassen, sie zu untersuchen, so bald die Wissenschaften anfingen, wieder empor zu steigen. Da sie auf wenige, sehr einfache und allgemeine Grundsätze gebaut sind, so mußte man darinnen nothwendig einen ziemlichen Fortgang machen.

Die Geometrie und Analyse gaben eine Menge von Hülfsmitteln an die Hand, um die Aufgaben aufzulösen, so bald man nur erst so weit gekommen war, daß man sich dieselben vorlegen konnte. Der einzige Fall, welcher noch zurückblieb, war der, wenn das Licht nach und nach durch

verschiedene sphärische und concentrische Mittel gieng. Ich habe in dieser Abhandlung diese Lücke auszufüllen gesucht. Man wird daraus sehen, daß dieser Fall weder so verwickelt noch so schwer ist, als er anfänglich zu seyn scheint, und daß man noch weiter gehen kann. Man weiß, daß er bey der Athmosphäre vorkommt, und daß die Strahlenbrechung davon abhängt, welche man bei die Gestirne und den Gegenständen auf der Erde gewahr wird. Dieser einzige Punct ist schon hinlänglich, um ihn von Wichtigkeit, und ihn der Mühe würdig zu machen, welchen die größten Geometer über sich genommen haben, um ihn, in dieser Absicht zu erörtern. Ich habe den Weg verlassen, den sie betreten, weil ich fand, daß er sie nicht zum Ziele führete.

Es kam mir vor, als wenn man nicht anders, als durch Umwege, dazu gelangen könnte. Ich gieng also wieder zurück, und hielt mich etwas auf, um diese zu entdecken. Man wird es mir nicht vorwerfen, daß ich die Dichtigkeit der Luft aus der Acht gelassen. Alles, was ich dadurch gewonnen hätte, wäre eine Differential-Gleichung gewesen, ohne daß ich dadurch weiter gekommen wäre. Weil ich aber diese weg ließ, so wurde meine Abhandlung schlechthin optisch und mathematisch; das ist, es ließ sich alles aufs strengeste beweisen. Hätte ich die Dichtigkeit in Betrachtung gezogen, so wäre ich an willkührliche Hypothesen gebunden gewesen: der Unterschied fällt in die Augen.

Dieses ist ohngefehr alles, was ich vorläufig von diesem kleinen Werke zu sagen habe. Wenn man es ließt, so wird man leicht im Stande seyn, das Uebrige hinzu zu setzen.

Der andere Theil der Optic, von dem ich hauptsächlich reden will, ist die Photometrie. Diese beschäftiget sich mit dem Glanze des Lichts, mit seiner Dichtigkeit, mit seiner erleuchtenden Kraft, mit seinen Modificationen bei dem Farben und Schatten, mit seinen verschiedenen Graden, und mit seiner Zu- und Abnahme, welche es in allen diesen Fällen leidet. Wenn der erste Theil der Optic uns unendlich viele Hülfsmittel gegeben, um die Fehler des Gesichts zu verbessern, um die Urtheile zu berichtigen, welche das Auge

fällt, um den Schein von dem Wahren zu unterscheiden, um uns Welten kennen zu lernen, welche die Natur uns zu verbergen zu wollen scheint, indem sie solche weiter von uns entfernt hat, als die Kräfte unsers Gesichts reichen oder sie, wegen ihrer Kleinheit, unmerklich gemacht hat: so muß man auf der andern Seite gestehen, daß die Kenntnisse, welche wir vom Lichte selbst haben, dadurch eben nicht sonderlich erweitert worden sind. Die Photometrie trägt dazu unendlich mehr bey. Wenn man eine Theorie von dem Licht entwerfen will, so ist es nicht genug, daß man wisse, daß es sich nach einem gewissen Gesetze bricht und zurücke geworfen wird: sondern es kommt darauf an, daß man daraus die Größe des einen und des

andern, mit der Erfahrung übereinstimmend, herleite.

Die Photometrie ist nicht ein Feld, welches noch völlig unangebaut wäre. Berühmte Gelehrte haben daran gearbeitet. Hr. Bouguer hat uns davon einen sehr schönen Versuch in seiner Abhandlung von der Gradation des Lichts gegeben. Er läßt es durch verschiedene Gläser, durch Wasser und durch die Athmosphäre gehen. Er sucht alsdenn, wie viel es von seiner Stärke verliehrt. Er bedient sich desselben zu der berühmten Erfahrung, die Stärke des Sonnenlichts und des vollen Mondes mit einander zu vergleichen. Der Herr Euler hat erst kürzlich eine Abhandlung über die verschiedene Grade der Helligkeit der Gestirne gegeben; und man findet in

verschiedenen Schriften von der Optic Nachsuchungen, welche mit der Photometrie verwandt sind, besonders in der Optic des Herrn Smith und Kästner.

Alle diese Versuche sind Theile von einem Ganzen, von dem man noch sehr weit entfernt zu seyn scheint. Man darf sich aber darüber gar nicht verwundern. Nichts ist so schwer, als das Maas des Lichts zu finden, wenn man es durch alle Modificationen und alle Erscheinungen verfolgen will, welche es uns darbietet. Waren die Grundsätze, um die Bahnen des Lichts zu finden, leicht uud einfach, wenn der äußerste Rand des Schattens oder die verdünnte Strahlen, welche in der Camera obscura fielen, sie sichtbarlich zeigten, so ist es doch weit gefehlt, daß es diejenigen

auch seyn solten, welche man bei der Photometrie gebraucht. Es trift sich selten, daß man sie für sich allein antrift, es wird eine Menge von Erfahrungen erfordert, um sie uns von allen Nebenumständen frey zu machen, in denen sie gemeiniglich verwickelt sind.

Da uns diese Wissenschaft also noch beinahe ganz fehlte, und übrigens viel angenehmes an sich hat, so nahm ich mir vor, darüber einen Versuch heraus zugeben, der, wenn er auch diese Wissenschaft nicht völlig erschöpft, wenigstens nicht ganz unvollständig seyn wird.

Man wird darinnen die ganze Reihe von Erfahrungen finden, welche ich machen mußte, um die Menge des Lichts zu bestimmen, welche auf der äußern und innern

Fläche des Glases unter jeden Einfalls-winkel gebrochen und zurückgeworfen wird. Ich bin weiter gegangen, und habe den Calcul darauf angewandt, der durch die Erfahrung nicht umgestoßen wurde. Man weiß, daß dieses gerade dasjenige ist, was bey der Theorie des Lichts am schwersten zu erklären war, und man konnte sich berechtigt halten, zu glauben, daß eine Theorie, welche diese Erscheinungen erklären, und Gründe für den Calcul liefern würde, der Wahrheit ziemlich nahe kommen müßte. Ich wende eben diese Erfahrungen auf mehrere Gläser an, und dadurch erhalte ich für jeden Einfallswinkel das, was Hr. Bouguer bloß für den rechten Winkel suchte. Ich handle von der Abnahme des Lichts, welches durch die Athmosphäre geht, und

nehme dabei keine physicalische Hypothese zu Hülfe. Man findet darinnen die Theorie der innern Stärke des gerade fortgehenden Lichts, die Helligkeit der erleuchteten Gegenstände, verglichen mit der Helligkeit des Lichts selbst, welches dieselben erleuchtet, die Helligkeit der Bilder in den Brennpuncten caustischer Gläser, verglichen mit der Helligkeit der Gegenstände selbst, sowohl durch die Theorie als Erfahrung, und dabei habe ich in der Rechnung die Menge des Lichts mit genommen, welche die Oberfläche der Gläser zurücke werfen. Die Erleuchtung des Planetensystems, die Helligkeit der Planeten und ihre Phasen, von der Erde aus gesehen, ihre erleuchtende Kraft ꝛc. Dieses aber ist nicht eine bloße Abschrift der Eulerschen Theorie. Sie

fließt aus ganz andern und besser auseinander gesetzten Grundsätzen, und stimmt sehr schön mit der Erfahrung des Herrn Bouguer, über die Helligkeit des Monds und der Sonne, überein, welche die Berechnung des Herrn Eulers, wider sein Vermuthen, zu klein, des Herrn Smiths seine aber zu groß angab. Die verschiedene Grade des Schattens, und das Maas derselben; Werkzeuge, um die Grade der Helligkeit der Farben, und das Maas derselben zu bestimmen; die Helligkeit der Gegenstände, in so fern sie von der Veränderung der Oeffnung der Pupille abhängt ꝛc.

Dieses ist eine bloße Anzeige einiger Gegenstände, welche ich in meiner Photometrie durchgehe. Um einen Begriff von

dem ganzen zu geben, so will ich nur sagen, daß das, was ich über verschiedene Materien sagen werde, welche man schon in andern Schriften abgehandelt findet, von diesem eben so unterschieden ist, als gegenwärtiges Werk von demjenigen unterschieden ist, was andre Schriftsteller von der astronomischen Strahlenbrechung sagen, und was das anbetrift, was darinnen wirklich neu ist, und das man gleich mit der Erfahrung vergleichen kann, so schmeichle ich mir, daß es den Beifall meiner Leser erhalten wird.

Nachricht des Uebersetzers.

Gegenwärtiges Werk, von dem man mit vielem Grunde behaupten kann, daß es das einzige ist, welches uns etwas Deutliches und in seiner Art Vollständiges, besonders von der Strahlenbrechung, liefert, kam vor vierzehn Jahren in Holland heraus, und wurde mit so vielen Beifall aufgenommen, daß man schon vor ein paar Jahren kein Exemplar mehr davon bekommen konnte. Eine neue Auflage war also nothwendig, und da es in Teutschland nicht so bekannt war, als es wegen der Wichtigkeit der darinnen abgehandelten Materien von rechtswegen hätte seyn sollen, und es überdem die Frucht eines teutschen Genies ist, so glaubt man, sich seinen Landsleuten durch eine Uebersetzung desselben gefällig zu erweisen. Ueberhaupt muß man es kennen, wenn man an verschiedenen Orten den Herrn Verfasser selbst, und andre Schriftsteller vom ersten Range, welche sich darauf beziehen, verstehen und überzeugt seyn will, daß man, in Absicht auf die Strahlenbrechung, noch nicht weiter gekommen ist.

Ich habe einige Anmerkungen beygefügt, und diese sind diejenigen, welche ohne Paragraph-Zahlen vorkommen.

Erster

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Bahn des Lichts durch verschiedene brechende Mittel, die sphärisch und concentrisch sind.

1. Erfahrung.

§. 1.

Wenn das Licht aus einem Mittel in ein dichteres oder dünneres übergeht, so wird es an der Oberfläche gebrochen, und die Verhältniß zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels ist für einerley Mittel unveränderlich, der Einfallswinkel mag beschaffen seyn wie er will.

2. Erfahrung.

§. 2. Wenn das Licht nach und nach durch verschiedene Mittel geht, deren Oberflächen eben und parallel sind, so ist die Verhältnis zwischen dem Sinus des Einfallswinkels auf die Oberfläche des ersten Mittels, und dem Sinus des Brechungswinkels auf die letzte Oberfläche mit derjenigen einerley, welche man bekommen würde, wenn das Licht unmittelbar aus dem ersten in das letzte Mittel fiele.

Anmerkung.

§. 3. Diese beide Erfahrungen sind so bekannt, daß es überflüßig seyn würde, sich lange dabey aufzuhalten. Ich führe sie hier bloß als Grundsätze an, aus denen ich in der Folge alles beweisen werde.

Insbesondere ist die erste die Grundlage der ganzen Dioptric. Man hat nicht unterlassen, verschiedene Beweise dazu aufzusuchen. Ich führe sie hier aber weiter nicht als bloße Erfahrungen an. Die zweite scheint von der ersten abhängig zu seyn, und die Art, auf welche man diese zu beweisen sucht, sey, welche sie wolle, so wird man daraus die andre leicht herleiten können.

1. Lehrsatz.

§. 4. Wenn das Licht nach und nach durch verschiedene brechende Mittel geht, so ist die Verhältnis des Sinus des ersten Einfallswinkels zu dem Sinus des letzten Brechungswinkels, der Summe der Verhältnisse der Sinus der dazwischen liegenden Winkel gleich.

Beweis.

Man lasse die ebene und parallele Flächen BH, LI, MK, NE, (Fig. 1.) die brechende Mittel von einander absondern, und ABCDEF sey ein Lichtstrahl, welcher nach und nach bey B, C, D, E gebrochen wird. Für diese vier Brechungen bekommt man folgende Verhältnisse:

Sin. GBA : Sin. CBL
Sin. HCB : Sin. DCM
Sin. IDC : Sin. EDN
Sin. KED : Sin. FEP.

Deren Summe

(Sin. GBA. Sin. HCB. Sin. IDC. Sin. KED) : (Sin. CBL. Sin. DCM Sin. EDN. Sin. FEP) ist.

Weil aber die Oberflächen der Mittel parallel sind, so ist

HCB = CBL
IDC = DCM
KED = EDN.

Setzt man diese Werthe für einander, so verwandelt sich die Summe der Verhältnisse in (Sin. GBA. Sin. HCB. Sin. IDC. Sin. KED) : (Sin. HCB. Sin. IDC. Sin. KED. Sin. FEP) das ist in Sin. GBA: Sin. FEP.

Folgesatz.

§. 5. Nach die zweite Erfahrung §. 2. ist die Verhältniß Sin GBA: Sin. FEP, einerley mit derjenigen, welche alsdenn statt finden würde, wenn das Licht aus dem Mittel A unmittelbar in das Mittel F übergienge. Hieraus folgt

also: wenn das Licht nach und nach durch verschiedene Mittel geht, welche durch ebene und parallele Flächen von einander abgesondert werden, so ist die Summe der Verhältnisse zwischen die Sinus der Einfalls und Brechungswinkel der Verhältniß der Sinus eben dieser Winkel gleich, wenn das Licht aus dem ersten Mittel unmittelbar in das letzte fällt.

1. Lehrsatz.

§. 6. Die Linien AB, BC, CD, DE, EF, FG (Fig. 2.) sind Seiten eines Vielecks, und wenn die beide äußersten AB, FG verlängert werden, so begegnen sie einander in Q. Nimmt man nun nach Belieben einen Punct H an, und zieht von demselben die gerade Linien HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HQ: so ist die Verhältniß des Products der Sinus der äußern Winkel HFG, HEF, HDE, HCD, HBC, zu dem Product der Sinus der innern Winkel HFE, HED, HDC, HBA, einerley mit der Verhältniß des Sinus des Winkels HQG zu dem Sinus des Winkels HQA.

Beweis.

Man verlängere die Seiten, ziehe von dem Punct H auf dieselben perpendiculär Linien, und setze den Halbmesser = 1 so hat man diese Verhältnisse:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Sin}\,HFG = \frac{HP}{HF} \\ \text{Sin}\,HEF = \frac{HN}{HE} \\ \text{Sin}\,HDE = \frac{HM}{HD} \\ \text{Sin}\,HCD = \frac{HL}{HC} \\ \text{Sin}\,HBD = \frac{HK}{HB} \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \text{Sin}\,HFE = \frac{HN}{HF} \\ \text{Sin}\,HED = \frac{HM}{HE} \\ \text{Sin}\,HDC = \frac{HL}{HD} \\ \text{Sin}\,HCB = \frac{HK}{HC} \\ \text{Sin}\,HBA = \frac{HI}{HB} \end{array}\right\}$$

Multiplicirt man diese der Ordnung nach in einander, so heben sich die Nenner und die dazwischen fallende Zähler auf, und man bekommt die Verhältniß HP : HI. Es ist aber die Verhältniß des Sinus des Winkels $HQG = \frac{HP}{HQ}$ zu dem Sinus des Winkels $HQA = \frac{HI}{HQ}$ ebenfalls der Verhältniß HP : HI gleich. Folglich ist diese auch der Verhältniß der Producte gleich.

1. Folgesatz.

§. 7. Da der Sinus eines jeden Winkels zugleich der Sinus des Zusatzes desselben zu zweyen rechten Winkeln ist, so läßt sich der Lehrsatz, den wir oben bewiesen haben, auch folgender Gestalt ausdrücken:

Das Product aus den Sinus der Winkel ABH, BCH, CDH, DEH, EFH, verhält sich zu dem Product aus den Sinus der Winkel KBH, LCH, MDH, NEH, PFH, wie der Sinus des Winkels HQI zu dem Sinus des Winkels HQP oder schlechthin wie die Linie HI zu der Linie HP.

2. Folgesatz.

§. 8. Nimmt man die Seiten des Vielecks unendlich klein an, so verwandelt es sich in eine krumme Linie, deren Tangenten PG, IA sind, und HP, HI sind alsdenn auf diese Tangenten senkrecht.

Anmerkung.

§. 9. Es wäre überflüßig zu beweisen, daß der Winkel PQI der Summe der Winkel PFE, NED, MDC, LCB, KBA, und dem Winkel IHP gleich ist.

2. Lehrsatz.

§. 10. Man betrachte den Punct H als den Mittelpunct eines Cirkels, und beschreibe aus demselben durch die Puncte A, B, C, D, E, F, G ꝛc. Cirkelbogen. Die Räume zwischen diesen Bogen lasse man mit durchsichtigen Materien angefüllt seyn, davon jede eine andere Strahlen brechende Kraft hat. Geht nun ein Lichtstrahl von G nach A durch alle diese Mittel, und wird bey F, E, D, C, B, nach und nach gebrochen, so verhält sich das Product aus den Sinus aller Einfallswinkel

zu dem Product aus den Sinus des Brechungswinkel, wie HP zu HI.

Beweis.

Die Einfallswinkel sind den ihnen entgegen gesetzten Winkeln PFH, NEH, MDH, LCH, KBH rc. gleich, und die Brechungswinkel sind EFH, DEH, CDH, BCH, ABH. Der übrige Beweis ist lediglich eine Anwendung des 1. Folgsatzes aus dem 1ten Lehrsatz (§. 7.)

Folgesatz.

§. 11. Die Summe der Verhältnisse der Sinus der Einfallswinkel zu den Sinus der Brechungswinkel, ist also mit der Verhältniß HP : HI oder des Sinus des Winkels HQP zu dem Sinus des Winkels HQI einerley.

Anmerkung.

§. 12. Es ist bekannt, daß man bey der Zusammensetzung der Verhältnisse die Glieder in einander multipliciren muß, und die Verhältniß der Producte alsdenn die Summe der Verhältnisse giebt. Und umgekehrt geschieht die Subtraction der Verhältnisse durch die Division. Ich merke dieses hier bloß deswegen an, um zu zeigen, daß der vorige Lehrsatz und der darauf folgende Satz einerley sind, und wie man ihn mit dem Folgesatz aus dem ersten Lehrsatz vergleichen könne. (§. 5.)

3. Lehrsatz.

§. 13. Die Verhältniß des Sinus des Winkels HQP zu dem Sinus des Winkels HQI

ist mit derjenigen Verhältniß vollkommen einerley, welche zwischen dem Sinus des Einfalls und Brechungswinkels statt finden würde, wenn das Licht gleich aus dem ersten in das letzte Mittel, nemlich aus dem Mittel G in das Mittel A fiele.

Beweis.

Die Verhältniß des Sinus des Winkels HQP zu dem Sinus des Winkels HQI ist der Summe der Verhältnisse der Sinus aller Einfallswinkel zu den Sinus der Brechungswinkel an den Oberflächen der dazwischen liegenden Mittel gleich. (§. 10.) Die Summe dieser Verhältnisse ist aber der Verhältniß der Sinus des Einfalls und Brechungswinkels gleich, wenn das Licht unmittelbar aus dem ersten in das letzte Mittel fällt. (§. 5.) Folglich ist die Verhältniß des Sinus des Winkels HQP zu dem Sinus des Winkels HQI einerley mit der Verhältniß zwischen die Sinus des Einfalls und Brechungswinkels, wenn das Licht unmittelbar aus dem ersten in das letzte Mittel übergienge.

4. Lehrsatz.

§. 14. Wenn man statt die Mittel A, B, C, D, E, F, G, bloß die beiden äußersten AB und FG nimmt, und das erstere den ganzen Raum zwischen dem Cirkel A und demjenigen einnehmen läßt, welcher durch Q aus dem Mittelpunct H beschrieben werden kann; das zweite aber den Raum zwischen die durch Q und G beschriebene Cirkel ausfüllt; so wird ein

Strahl, der nach der Richtung der Linie QG einfällt, bey Q so gebrochen, daß er nach der Richtung der Linie QA fortgeht, und so in den Punct A kommt, als wenn er durch die verschiedene Mittel ABCDEFG nach den Richtungen GFEDCBA gegangen wäre.

Beweis.

Nach dem, was in diesem Satze voraus gesetzt worden, sind bloß die beide äußersten Mittel da, welche der durch Q beschriebene Cirkel von einander absondert. Es ist dahero offenbar, daß das Licht gleich aus dem ersten in das letzte Mittel übergeht, und da die brechende Kraft derselben verschieden ist, bey Q, wo die Oberflächen der Mittel sich berühren, gebrochen wird. Der Einfallswinkel ist dem ihm entgegen gesetzten Winkel PQH gleich, und der Sinus des Brechungswinkels wird sich zu dem Sinus des Winkels PQH, wie der Sinus des Winkels IQH zu dem Sinus eben des Winkels PQH verhalten. (§. 12.) Demnach ist der Winkel IQH mit dem Brechungswinkel einerley. Das Licht wird also nach der Richtung der Linie QI fortgehen. Es ist aber QI nichts anders als die verlängerte Seite AB (§. 6.) folglich wird das Licht durch eben den Punct A gehen, durch den es in dem Falle gieng, da es durch die verschiedene Mittel ABCDEFG fiel.

5. Lehrsatz.

§. 15. Die Strahlenbrechung ist in beiden Fällen des vorigen Satzes einerley.

Beweis.

Man versteht unter die Strahlenbrechung den Winkel, welchen die Richtung des einfallenden Lichts mit der Richtung des gebrochenen Lichts macht. Nun ist in beiden Fällen die bis P verlängerte Linie GQ die Richtung des einfallenden Lichts, und QAI die Linie, in der das gebrochne Licht fortgeht, folglich eben dieselbe, und die Strahlenbrechung wird durch den Winkel PQA gemessen.

1. Anmerkung.

§. 16. Durch Hülfe dieser beiden letzten Lehrsätze, wird also die Summe aller Strahlenbrechungen, welche das Licht bey den Flächen F, E, D, C, B, leidet, auf eine einige bey Q herunter gesetzt, die so beschaffen ist, daß 1) die Verhältniß der Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel eben diejenige ist, welche alsdann statt findet, wenn das Licht aus dem äußersten in das andere Mittel fällt, und diese Mittel sich bey Q berühren. 2) Ist der Winkel PQI = IHP das Maas der Strahlenbrechung. Die Entfernung HQ aber verändert sich, wenn das Licht unter einen andern Winkel auf die Mittel fällt, und dieses macht die Bestimmung der Strahlenbrechung schwerer.

2. Anmerkung.

§. 17. Weil die Anzahl der Mittel, ihre Entfernung von einander, und ihre Strahlen brechende Kraft in diesen Lehrsätzen nichts verän-

dern; so sieht man leicht, daß sie sich auch alsdenn anwenden lassen, wenn das Licht in eine krumme Linie durch die verschiedene Mittel geht, wie bey der Erd-Atmossphäre, und daß sie nichts von ihrer Allgemeinheit verlieren, man mag die ganze krumme Linie oder nur einen Theil derselben annehmen.

6. Lehrsatz.

§. 18. **Die Verhältniß der Sinus aller Winkel, welche die Bahn des Lichts ABCD EFG mit den Linien AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH einschließt, die von dem Mittelpunct H nach den Puncten gezogen werden, wo das Licht gebrochen wird, ist unveränderlich, der Einfallswinkel mag beschaffen seyn wie er will.**

Beweis.

Weil die Mittel cirkelförmig und concentrisch sind, so ist klar, daß die Linien AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH Halbmesser und aus dieser Ursach unveränderlich sind. Nun verhalten sich die Sinus der Winkel, welche in einer und eben derselben Schichte entstehen, z. B. der Winkel EDH, und DEH wie die gegen über liegende Seiten EH, DH, folglich wie die Halbmesser der Oberflächen. Es ist aber diese Verhältnis unveränderlich, folglich auch die Verhältnis der Sinus der Winkel, welche in eben derselben Schichte entstehen.

Es ist ferner der Sinus eines jeden äußern Winkels, z. B. des Winkels EDH, dem Si-

nus des Winkels MDH gleich, welcher dessen Zusatz zu zweyen rechten Winkeln ist, folglich dem Sinus des Einfallswinkels. Der daran liegende Winkel CDH ist aber der zu diesem Winkel gehörige Brechungswinkel. Nach dem Gesetz der Strahlenbrechung (§. 1.) ist aber die Verhältnis zwischen die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels unveränderlich. Folglich ist auch die Verhältnis der Sinus zweyer Winkel, welche an eben der Oberfläche an einander stoßen, wie EDH, CDH unveränderlich.

Es ist also die Verhältniß der Sinus der Winkel in einer und eben der Schichte wie DEH, EDH, und der Sinus der Winkel von dieser Schichte zu der darauf folgenden, wie EDH, CDH unveränderlich; folglich ist auch die Verhältniß der Sinus aller Winkel, welche die Bahn des Lichts mit den aus dem Mittelpunct H nach den Brechungspuncten gezogenen Linien HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG einschließt, unveränderlich.

Folgesatz.

§. 19. Es verhält sich also der Sinus des Winkels BAH zu dem Sinus eines andern Winkels, z. B. DEH, den die Bahn des Lichts mit der Oberfläche E einschließt, wie der Sinus eines andern Winkels, den dasselbe an der Oberfläche A unter einen andern Einfallswinkel macht, zu dem Sinus, der dadurch an der Oberfläche E entsteht.

7. Lehrsatz.

§. 20. Der Winkel unter den das Licht auffällt, mag beschaffen seyn wie er will, so ist doch die Verhältniß der Linien HI, HK, HL, HM, HN, HN, welche auf die verlängerte Seiten AB, BC, CD, &c. perpendiculär gezogen werden können, unveränderlich.

Beweis.

Wenn man die gerade Linien HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, als Halbmesser ansieht, so sind diese perpendiculäre Linien HI, HK, HL, HM, HN, HP die Sinus der Einfalls- und Brechungwinkel, und dahero ist ihre Verhältniß gegen einander unveränderlich.

8. Lehrsatz.

§. 21. Man verlängere die gerade Linie AB, bis sie der äußersten brechenden Oberfläche RF in R begegnet, und, nachdem man den Halbmesser HR gezogen, mache man den Winkel SRH dem Winkel PFH gleich, und verlängere SR bis T. Wenn nun der Raum zwischen den Cirkeln A und RF mit eben dem Mittel ausgefüllt wäre, welches sich zwischen A und B befindet, und es fiele ein Lichtstrahl nach der Richtung der geraden Linie TR auf die Fläche RF, so wird dieser dergestalt gebrochen werden, daß er in der geraden Linie RA nach dem Punct A fortgeht, vollkommen, wie in dem Falle des vierten Lehrsatzes, und der Brechungswinkel SRA wird mit dem

Winkel RHF zusammengenommen, dem Winkel PQA gleich seyn, welche das Maas der Strahlenbrechung in den beiden Fällen des angeführten Satzes ist.

Beweis.

1. Weil die beide äußerste Mittel sich in FR berühren, so wird das Licht bey R dergestalt gebrochen, daß sich der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels, wie HP zu HI verhält. (§. 12). Zieht man die Linie HS auf SR perpendiculär, so wird HS = HP weil HF = HR, PFH = SRH und HPF = HSR rechte Winkel sind. Die Sinus verhalten sich demnach wie HS zu HI. Nimmt man aber HR für den Halbmesser an, so ist HS der Sinus des Einfallswinkels, und HI der Sinus des Brechungswinkels. Folglich muß das Licht nachdem es bey R gebrochen worden, in die Linie RA fortgehen, und dahero den Punct A treffen.

2. Man verlängere die Linie FP bis sie der Linie SR in U begegnet, so ist der Winkel VOR, dem ihm entgegengesetzten Winkel HOF, der Winkel VRH dem Winkel PFH gleich, und die Triangel RVO, OHF sind einander ähnlich. Es ist aber der Winkel VQA die Summe der Winkel VRQ, RVQ, folglich ist er auch den beiden Winkeln URQ, RHF zusammengenommen gleich.

Anmerkung.

§. 22. Dieser Satz zeigt den Unterschied, welcher zwischen der geradelinigten Strahlenbrechung in einem gleich dichten Mittel und derjenigen statt findet, welche das Licht leidet, indem es durch verschiedene Mittel geht, und darinnen einigemal hintereinander gebrochen wird. Daraus läßt sich auch abnehmen, daß wenn man für den ersten Fall den Brechungswinkel VRA gefunden, man noch den Winkel RHF hinzusetzen muß, um die Strahlenbrechung im zweiten Falle zu bekommen, welche dem Winkel PQA gleich ist. Je stärker demnach in dem zweiten Falle die Bahn des Lichts ABCDEFG gekrümmt ist, je größer ist auch der Unterschied der Strahlenbrechung in diesen beiden Fällen.

9. Lehrsatz.

§. 23. Man mache die Linie HZ der vierten Proportionallinie zu den Linien HP, HI und HF gleich, und, nachdem man dem Bogen ZW beschrieben, welcher die gerade Linie AI in W durchschneidet, ziehe man von H nach W eine gerade Linie: so wird der Winkel IWH dem Winkel PFH gleich seyn, der dem Winkel unter dem das Licht bey F auffällt, gleich und entgegengesezt ist.

Beweis.

Nach der Construction hat man folgende Proportion

HP : HI = HF : HW

aus der man sogleich diese

HP: HF = HI: HW

bekommt. Nun aber sind HIW, HPF recht winklichte Triangel, folglich einander ähnlich, und dahero ist der Winkel IWH dem Winkel PFH gleich.

1. Folgesatz.

§. 24. Die Verhältniß der senkrechten Linien HI, HP, ist für einerley Schichten unveränderlich, der Einfallswinkel mag so schief seyn als er will. (§. 19) Nun ist aber auch der Halbmesser HF unveränderlich, und dahero ist denn klahr daß es der Halbmesser HW ebenfalls seyn müsse. Hieraus folgt denn, der Winkel unter dem das Licht auffällt mag so schief seyn als er will, so wird doch die Linie AW eben so stark auf den Cirkel, ZW geneigt seyn, als das auffallende Licht in F auf die Fläche F geneigt ist.

2. Folgesatz.

§. 25. Hieraus folgt denn weiter daß der Winkel WHA dem Unterschied der beiden Winkel PFH, WAH und folglich dem Unterschied der beiden äußersten Einfallswinkel gleich ist. Denn dieser Winkel ist der Unterschied der Winkel WAH, IWH, der Winkel IWH aber ist dem Winkel PFH gleich.

10. Lehrsatz.

§. 26. **Wenn alles übrige so bleibt wie in dem vorigen Lehrsatz, so ist der Winkel**

WHF

WHF dem Winkel PQA gleich, welcher das Maas der Strahlenbrechung ist.

Beweis.

Der Winkel IWH ist dem Winkel PFH gleich, und der Winkel HWA das Complement des Winkels IWH. Demnach ist offenbahr die Summe der beiden gegen über liegenden Winkel AWH, QFH in dem Viereck HWQF zweyen rechten Winkeln gleich. Folglich ist auch die Summe der beiden übrigen Winkel WQF und WHF zweyen rechten Winkeln, und dahero der Winkel WHF dem Winkel PQA gleich, welcher der Zusatz des Winkels WQF zu zweyen rechten Winkeln ist.

1. Folgesatz.

§. 27. Da die gegen überliegende Winkel in dem Viereck HWQF zweyen rechten Winkeln gleich sind, so folgt daraus, daß es allezeit in einem Cirkel beschrieben werden kann, und daher liegen die vier Punkte HWQF, in dem Umkreise eines Cirkels. Hieraus folgt denn weiter, daß wenn von diesen vier Puncten drey gegeben sind, der Cirkel, welche durch alle viere geht, beschrieben werden kann, und der vierte Punct nebst der Strahlenbrechung bestimmt wird.

2. Folgesatz.

§. 28. Man findet eben so, daß der Winkel WHR dem Winkel SRA gleich ist, welcher das Maas der gerade linigten Strahlenbrechung ist. (§. 21). Denn nach dem angeführten Lehrsatz

ist SRA + RHF = PQA. Es ist aber der Winkel PQA dem Winkel WHF gleich (§. 26.) Folglich ist SRA = WHF — RHF = WHR.

Anmerkung.

§. 29. Dieses sind die einfachste und merkwürdigste Eigenschaften, welche ich bey der Bahn habe entdecken können, in der das Licht fortgeht, wenn es durch verschiedene sphärische und concentrische Mittel fällt. Es ist für sich klar, daß sie sich auch in den Fällen; anwenden lassen, wenn die Bahn eine krumme Linie ist. Sie werden Gelegenheit zu einigen andern Untersuchungen geben, die ich in der Folge anstellen will. Inzwischen giebt es noch mehrere, die aber meistentheils sehr verwickelt sind, wenn man voraus setzt, daß die brechende Mittel eine endliche Entfernung von einander haben, inzwischen aber einfacher werden, wenn mann diese Mittel unendlich nahe an einander setzt, und die strahlenbrechende Kräfte derselben wenig verschieden sind. Dieses ist der Fall, den ich genauer untersuchen will. Man sieht leicht, daß er bey der Atmosphäre der Erde vorkömmt, und indem ich ihn untersuche, nähere ich mich immer mehr der Absicht, die ich mir vorgesetzt habe.

Vortrag des Falls.

§. 30. Es sey C (Fig. 3.) der gemeinschaftliche Mittelpunct aller strahlenbrechenden Mittel, deren Oberflächen sphärisch und unendlich nahe sind, wie solches die durch M und n gezogene

Cirkel anzeigen. Die krumme Linie AMn stelle die Bahn des Lichts vor, in der es durch die beide Puncte M und n nach A fortgeht. Man ziehe die gerade Linien AI, MT, nt, so daß sie die krumme Linie in diesen Puncten berühren, und ziehe darauf von dem Mittelpunct C die Linien CD, CT, Ct perpendiculär, so ist der unendlich kleine Winkel TMt die Strahlenbrechung der Schichte M und die Summe aller Brechungen des Theils AM ist dem Winkel TGA = DCT gleich. (§. 14.) Man lasse MR, nR auf die Tangenten TM, tn perpendiculär seyn, und in R zusammen kommen, so ist die gerade Lienie MR der zu dem Punct M gehörige Halbmesser der Krümmung, und der Winkel MRn dem Winkel tMT gleich, welcher das Maas der Strahlenbrechung ist.

Lehrsatz.

§. 31. Der Halbmesser der Krümmung MR verhält sich zu dem kleinen Theil Mn der krummen Linie, wie die Tangente MT zu ts dem Unterschied der beiden Perpendiculärlinien CT, Ct.

Beweis.

Diese Analogie folgt nothwendig aus der Aehnlichkeit der beiden Triangel tnT, MRn, denn die Winkel bey t und n sind rechte Winkel, und die Winkel tnT, MRn einander gleich. (§. 30.)

Folgesatz.

§. 32. Der Halbmesser der Krümmung ist also in der gerade zusammen gesetzten Verhältniß der Tangente MT und des Elements Mn der krummen Linie, und in der umgekehrten Verhältniß der Differenz der beiden Perpendiculärlinien CT, Ct.

12. Lehrsatz.

§. 33. Der Unterschied ts der beiden Perpendiculärlinien CT, Ct ist in der unveränderlichen Verhältniß des Sinus des Winkels TMC für eben die Schichten M, n.

Beweis.

Wenn die Entfernungen der Berührungs- und Durchschnitspuncte von dem Mittelpunct C für jeden Einfallswinkel einerley bleiben, so haben alle Linien, welche von dem Mittelpunct C auf die Tangente der krummen Linie perpendiculär gezogen werden, die unveränderliche Verhältniß der Sinus aller der Winkel gegen einander, welche die Bahn des Lichts mit den geraden Linien einschließt, welche man von dem Mittelpunct C dahin zieht. (§. 17. 19.) Weil nun hier vorausgesetzt wird, daß die Entfernungen CM, Cn der Schichten einerley bleiben, so sind die Perpendiculärlinien CT, Ct und dahero auch der Unterschied derselben ts in der unveränderlichen Verhältniß des Sinus des Winkels TMC, der Einfallswinkel sey wie er wolle.

13. Lehrsatz.

§. 34. **Wenn die Entfernung der Schichten M und n einerley bleiben, so ist das Element M n der krummen Linie, welches zwischen diese beide Schichten eingeschlossen ist, in der unveränderlichen umgekehrten Verhältniß des Cosinus des Winkels T M C oder in der geraden Verhältniß der Secante eben dieses Winkels.**

Beweis.

Wenn man die Entfernung m n der Schichten für den Halbmesser annimmt, so ist M n, das Element der krummen Linie, die Secante des Winkels M n m, der dem Winkel T M C gleich gesetzt wird, weil ihr Unterschied unendlich klein ist. Da nun die Entfernung m n unveränderlich angenommen wird, so verhält sich das Element M n schlechthin wie die Secante des Winkels T M C, folglich umgekehrt wie der Cosinus desselben.

14. Lehrsatz.

§. 35. **Die Tangente M T ist in gerader Verhältniß des Cosinus des Winkels T M C.**

Beweis.

Wenn man die gerade Linie C M für den Halbmesser annimmt, so ist die Tangente M T, welche die dritte Seite des rechtwinklichten Triangels C M T ist, der Cosinus des Winkels T M C. Nun wird die gerade Linie C M als unveränderlich betrachtet, folglich ist T M in der unveränderlichen Verhältniß des Cosinus des Winkels C M T.

Anmerkung.

§. 36. Aus diesen dreyen Lehrsätzen erhellet also, daß eine jede von den drey Größen, durch welche der Halbmesser der Krümmung bestimmt wird, zu dem Sinus oder Cosinus des Winkels TMC eine unveränderliche Verhältniß hat. Vergleicht man also die vier letzten Sätze mit einander, so zieht man daraus folgenden

15. Lehrsatz.

§. 37. **Der Halbmesser der Krümmung MR ist in umgekehrter Verhältniß des Sinus des Winkels TMC oder in gerader Verhältniß der Cosecante desselben.**

Beweis.

Der 11te Lehrsatz §. 31. giebt

$$MR = \frac{Mn.\,MT.}{ts}$$

Es verhält sich aber Mn umgekehrt (§. 34.) und MT gerade wie der Cosinus des Winkels TMC Diese beide Verhältnisse heben aber einander auf, folglich verhält sich der Halbmesser der Krümmung MR umgekehrt wie ts der Unterschied der Perpendiculärlinien, folglich auch umgekehrt wie der Sinus des Winkels TMC (§. 33.) oder gerade wie die Cosecante desselben.

Folgesatz.

§. 38. Weil RMT ein rechter Winkel ist, so ist der Winkel CMR das Complement des Winkels CMT, folglich steht der Halbmesser

der Krümmung in gerader Verhältniß der Secante des Winkels CMR.

16. Lehrsatz.

§. 39. Man verlängere die gerade Linie MC bis S, und ziehe darauf von dem äußersten Punct des Halbmessers der Krümmung oder von dem Mittelpunct der Krümmung die Linie RS perpendiculär. Geht nun das Licht durch den Punct M unter einen andern Einfallswinkel, so wird der Mittelpunct des Krümmungskreises, welcher zu dem Punct M gehört, allezeit in der geraden Linie SR liegen, welche man verlängern kann, wenn es die Umstände erfordern.

Beweis.

Denn da der Halbmesser der Krümmung in der unveränderlichen Verhältniß der Secante des Winkels SMR steht, so ist offenbar, daß, wenn man die Linie MS beständig von einerley Größe annimmt, und sie als den Halbmesser ansieht, die gerade Linie MR oder der Halbmesser der Krümmung diese Secante vorstellt, und da sie derselben in einem Falle gleich ist, so muß sie es auch in allen übrigen seyn.

Folgesatz.

§. 40. Wenn demnach die Bahn des Lichts ein Theil eines Cirkels ist, so ist nichts leichter, als sie für jedem Einfallswinkel zu beschreiben. Denn wenn nur ein einziger Mittelpunct gegeben ist, so sind alle übrige bekannt.

18. Lehrsatz.

§. 41. Die gerade Linie MS verhält sich zu CM dem Halbmesser der Schichte, wie der Winkel MCn zu dem Brechungswinkel tMT.

Beweis.

Nach dem 11 Lehrsatz (§. 31.) ist

$$MR = \frac{Mn.\ MT}{ts.}$$

Nach der Construction aber ist

$$Mm = CM.\ MCm$$

$$Mn = \frac{CM.\ MCm.}{Sin.\ TMC}$$

$$MT = CM.\ Cos.\ TMC$$

$$ts = CM.\ tMT.\ Cas.\ TMC.$$

Substituirt man nun, so wird

$$MR = \frac{CM.\ MCm}{tMT.\ Sin.\ TMC}$$

Nach dem vorigen Lehrsatz ist aber

$$MR = \frac{MS}{Sin.\ TMC}$$

Folglich $MS = \frac{CM.\ MCm}{tMT.}$

und dahero

$$MS : CM = MCm : tMT.$$

1. Folgesatz.

§. 42. So oft demnach der Winkel MCm am Mittelpunct größer ist, als der Winkel

tMT, welcher die Strahlenbrechung ausdrückt, so oft ist auch die gerade Linie MS größer, als der Halbmesser CM, und umgekehrt, und eben daher sind auch die übrige Halbmesser der Krümmung größer, als CM.

2. Folgesatz.

§. 43. Ist aber MCm kleiner als TMt, so ist auch SM kleiner als CM, und die übrige Halbmesser der Krümmung, welche ins unendliche zunehmen können, können größer oder kleiner seyn als CM.

Anmerkung.

§. 44. Der erste Fall kommt bey der Athmosphäre der Erde vor, und man wird hernach sehen, daß die gerade Linie MS allezeit sechs bis achtmal größer ist, als der Halbmesser MC. Ich werde mich dahero noch etwas länger dabey aufhalten.

19. Lehrsatz.

§. 45. Die Summe der beiden Winkel tMT und TMC ist der Summe der beiden Winkel MCn und MnC gleich.

Denn MCn + MnC = tMC
nun ist tMC = tMT + TMC
folglich MCn + MnC = tMT + TMC.

1. Folgesatz.

§. 46. Wenn dahero der Winkel tMT kleiner ist, als der Winkel MCn, so ist auch der Winkel tnC kleiner, als der Winkel TMC und umgekehrt.

2. Folgesatz.

§. 47. Folglich wenn tnC kleiner ist, als TMC, so ist auch CM kleiner als MS und umgekehrt.

3. Folgesatz.

§. 48. Hieraus folgt denn weiter, daß wenn CM = MS, auch tMT = MCn und TMC = tnC ist.

20. Lehrsatz.

§. 49. **Wenn der Brechungswinkel TMt beständig größer ist, als der Winkel MCn am Mittelpunct, so nähert sich der Strahl MA dem Mittelpunct C in einer Spiral-Linie.**

Beweis.

Wenn tMT größer ist, als MCn, so ist auch tnC größer als TMC, folglich ist die Tangent TM stärker auf dem Halbmesser MC geneigt, als die Tangente tn auf dem Halbmesser nC. Diese Eigenschaft haben aber nur die Spirallinien, deren Mittelpunct C ist. Folglich 2c.

Anmerkung.

§. 50. Dieser Satz bleibt auch alsdenn noch richtig, wenn die Winkel tMT beständig den ihnen entsprechenden Winkeln MCn gleich sind. Denn in diesem Falle ist ebenfalls TMC = tnC. Dieses will so viel sagen: die krumme Linie, welche das Licht beschreibt, ist in allen Puncten gleich stark auf die dazu gehörige Halbmesser geneigt, die man von dem Mittelpunct C bis an dieselben ziehen kann. Diese Eigenschaft hat

aber bloß die logaritmische Spirallinie, in der also in diesem Falle das Licht fortgeht. Dieses ist der einige Fall, in dem der Neigungswinkel der krummen Linie auf die dazu gehörige Halbmesser beschaffen seyn kann wie er will. Bey allen Spirallinien, wo tMT größer ist als MCn, kann derselbe nicht ein gewisses Maas übersteigen, weil alsdann das Licht anstatt beym Zurückgehen vom Mittelpunct gebrochen zu werden, ganz würde zurückgeworfen werden. Die Logaritmische Spirallinie ist also der äußerste Fall, in dem die Strahlenbrechungen unter jeden Einfallswinkel möglich sind.

21. Lehrsatz.

§. 51. **Wenn der Winkel tMT beständig kleiner ist, als der ihm entsprechende Winkel MCn am Mittelpunct, so wird die krumme Linie, welche das Licht beschreibt, einen Scheitelpunct haben. Dieser wird unter allen übrigen Puncten der krummen Linie der nächste am Mittelpunct C seyn. Die Linie, die man von dem Mittelpunct durch diesen Scheitelpunct ziehen kann, ist alsdenn die Axe der krummen Linie, und auf derselben perpendiculär, und die Theile dieser krummen Linie, welche auf beyden Seiten der Axe liegen, sind einander ähnlich.**

Beweis.

Denn weil der Winkel TMt kleiner ist, als der Winkel MCn, so ist der Winkel TMC grösser als der Winkel tnC. Je mehr sich also die

krumme Linie dem Mittelpunct C nähert, je größer wird der Winkel TMC, und endlich ein rechter Winkel. So bald nun derselbe diese Größe erlangt hat, so ist die krumme Linie auf dem Halbmesser senkrecht, den man aus dem Mittelpunct bis an dieselbe ziehen kann, und das Licht geht wieder durch die obern Schichten in die Höhe. Weil nun beym Heraufsteigen die Brechung des Lichts in jeder Schichte eben so groß ist, als beym Heruntergehen, so ist das übrige klar.

Anmerkung.

§. 52. Ich habe diesen Beweis sehr abgekürzt, der aber weit länger würde geworden seyn, wenn ich jeden Theil des Satzes für sich hätte beweisen wollen. Inzwischen glaube ich alles so aus einander gesetzt zu haben, daß man im Stande seyn wird, das einzusehen, was weiter daraus gefolgert werden kann.

Uebrigens lernt man aus diesen beiden letzten Lehrsätzen die Natur der Linien kennen, welche das Licht in sphärischen und concentrischen Mitteln beschreiben kann, wenn die Strahlenbrechende Kraft der verschiedenen Schichten sich überall nach einerley Gesetz richtet. Denn es sind entweder Spirallinien (§. 49.) wenn die Brechung so stark ist, daß der Winkel TMn größer ist, als der Winkel MCn; oder, wenn er kleiner ist, so sind es krumme Linien, die auf beiden Seiten der Axe einander ähnlich sind, und diese hat die Eigenschaft, daß sie beständig

durch den Mittelpunct C geht. In diesem letzten Falle ist der Halbmesser der Krümmung an dem Scheitelpunct allezeit größer, als die gerade Linie, welche man von dem Mittelpunct C bis an denselben ziehen kann. (§. 47.) Hierdurch werden also alle Linien ausgeschlossen, welche nur ein Asymtote haben, wie die logaritmische Linie, und alle diejenigen, welche die Axe nicht in zwey gleiche und ähnliche Theile theilet, welches alle Linien sind, deren Dimension eine ungerade Zahl ist. Im Gegentheil kann man die Kegelschnitte zulassen: diese sind auch die einfachsten, und haben in Rücksicht auf diesem Fall sehr merkwürdige Eigenschaften.

22. Lehrsatz.

§. 53. **Wenn man die Mittel beybehält, so sind alle die krumme Linien, welche das Licht beschreibt, und deren Scheitelpuncte vom Mittelpunct C gleich weit entfernt sind, bloß der Lage nach von einander unterschieden.**

Beweis.

Denn da die verschiedene Schichten der Mittel sphärisch und concentrisch sind, so ist klar, das Licht mag unter einerley Winkel einfallen, wo es wolle, so leidet es einerley Brechung, und wird in allen Fällen auf einerley Art gebogen. Da nun die Linie, in der das Licht fortgeht, bey ihrem Scheitelpunct auf dem Halbmesser senkrecht ist, den man von dem Mittelpunct C durch den-

denselben ziehen kann, so ist offenbar, daß in allen den Fällen, in denen dieser Scheitelpunct vom Mittelpunct gleich weit entfernt ist, die Brechungen einerley sind; Folglich macht die Lage der Bahnen den einzigen Unterschied aus, und ihre Axen durchschneiden sich alle in dem Mittelpunct C.

Anmerkung.

§. 54. Ganz anders verhält sich aber dieses, wenn die Scheitelpuncte ungleich weit vom Mittelpunct entfernt sind, oder in verschieden Schichten liegen.

1. Folgesatz.

§. 55. Man mag also den Scheitelpunct in einer und eben der Schichte annehmen, wo man will, so bestimmt man beständig nur eine und dieselbe krumme Linie.

2. Folgesatz.

§. 56. Wenn also ein Theil AM der Bahn gegeben ist, und zugleich der Halbmesser der Krümmung, welcher zu einem darinn befindlichen Punct M gehört, so kann man M als den Scheitelpunct einer andern Bahn betrachten, deren Axe MC ist, und MS der Halbmesser der Krümmung, der zu dem Scheitelpunct gehört. (§. 39.)

3. Folgesatz.

§. 57. Wenn dahero die Bestimmung der Bahn des Lichts nur von einer unveränderlichen Größe abhängt, wie in den Fällen, wenn dieselbe ein Cirkel oder eine Parabel ist, so ist

offenbahr, daß, wenn man nur erst eine einzige Bahn beschrieben hat, man leicht daraus die übrigen finden kann, weil eben diese unveränderliche Größe allein den Halbmesser der Krümmung für dem Scheitelpunkt bestimmt.

Anmerkung.

§. 58. Auf diese Art findet man in dem Falle, wenn die Bahn des Lichts durch diese verschiedentlich brechende Mittel eine Parabel ist, die Entfernung des Mittelpuncts C von dem Mittelpunct der Krümmungskreise, welche zu den Scheitelpuncten gehören, beständig von einerley Größe. Hieraus folgt denn, daß der Brennpunct aller dieser Parabeln nur in einem einzigen Falle in dem Mittelpunct C der brechenden Mittel fallen kann. Wenn aber die Gleichung, welche die Natur der Bahn des Lichts ausdrückt, einige Coefficienten hat, so läßt sich nur ein einiger durch diesen Satz bestimmen. Die übrigen müssen für jeden Einfallswinkel durch Hülfe des 6ten und 16ten Lehrsatzes bestimmt werden, wenn sie für einen bestimmten Einfallswinkel schon bekannt sind. Denn alle Gleichungen, die man findet, können lediglich in Ansehung der Coefficienten verschieden seyn. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man den allgemeinen Ausdruck, für dem Halbmesser der Krümmung, der in der Lehre von den krummen Linien angegeben wird, mit demjenigen vergleicht, den ich in dem 11ten Lehrsatz für die Linien bestimmt habe, welche das Licht beschreibt. Ich will nunmehro

die Verhältnisse, welche die krumme Linie zu den darinnen vorkommenden Applicanten hat, durch analytische Formeln ausdrücken.

I. Aufgabe.

§. 59. Die Differentialgleichung für die Strahlenbrechung zu finden

Auflösung.

Man nehme den Halbmesser CA für die Einheit an, und setze CA = I die Entfernung CM = r. Den Winkel BAG = DAC = γ
Den Bogen AM = x, und Mn = dx.
Die Winkel TMC = ω
ACM = s
TGA = z
MmC = ds
TMt = dz
Der Halbmesser der Krümmung MR = R
Die Perpendicularlinie CT = u
ts = du

So bekommt man

$$DC = \text{Sin}\,\gamma. \quad DA = \text{Cos}.\,\gamma$$

$$TC = u = r\,\text{Sin}\,\omega$$

$$TM = r\,\text{Cos}.\,\omega$$

oder $TM = \sqrt{(rr - uu)}$

Da nun der Winkel TMt das Differential der Strahlenbrechung ist, so bekommt man

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

oder

$$dz = \frac{du}{r\,\text{Cos}.\,\omega}$$

oder

oder auch

$$dz = \frac{du \, \text{Tang.} \, \omega}{u}$$

und diese sind die Gleichungen, welche man finden sollte.

Anmerkung.

§. 60. Dieses sind aber nicht alle. Man kann z. B. das Differential der Strahlenbrechung auch durch den Halbmesser der Krümmung ausdrücken. Denn da der Winkel MRn dem Brechungswinkel TMt gleich ist (§. 30.) so ist

$$dz = \frac{Mn}{MR}$$

Weil aber $Mn = \frac{Mm}{\text{Sin.} \, \omega}$

und $Mm = MCm \, . \, MC = rds$

so verwandelt sich durch die Substitution die Gleichung in

$$dz = \frac{rds}{R. \text{Sin} \, \omega}$$

Folgesatz.

§. 61. Aus eben dieser Gleichung findet man denn wieder den Halbmesser der Krümmung

$$R = \frac{rds}{dz \, \text{Sin} \, \omega}$$

23. Lehrsatz.

§. 62. Der Halbmesser der Krümmung MR verhält sich zu dem Halbmesser CM der

C

Schichte M, wie die Entfernung der beiden Schichten mn zu ts dem Unterschied der beiden Perpendiculärlinien.

Beweis.

Nach dem 11ten Lehrsatz §. 31. ist

$$R : dx = r \text{Cos.}\, \omega : du$$

Hieraus folgt denn

$$R = \frac{r\,dx\, \text{Cos.}\, \omega}{du}$$

Allein es ist $dx\, \text{Cos.}\, \omega = dr$

Folglich $R = \dfrac{r\,dr}{du}$

und hieraus folgt denn

$$R : r = dr : du.$$

Anmerkung.

§. 63. Diese Eigenschaft des Halbmessers der Krümmung ist bloß analytisch, und findet bey allen krummen Linien ihre Anwendung, deren Natur durch eine Gleichung ausgedrückt wird, die sich auf einen gegebenen Punct C bezieht, den man als den Mittelpunct betrachtet. Sie wird indessen mehr eingeschränkt, wenn man betrachtet, daß im gegenwärtigen Falle die Perpendiculärlinien u in der unveränderlichen Verhältniß des Sinus des Winkels TMC stehen. Denn daraus folgert man, daß für einer und eben der Schichte der Halbmesser R der Krümmung sich umgekehrt wie dieser Sinus verhält. (§. 37.)

24. Lehrsatz.

§. 64. Die Länge der Perpendiculärlinien CT, Ct, die von dem Mittelpunct C auf die Tangenten TM, tn der Bahn gezogen werden, stehen in der zusammen gesetzten Verhältniß, aus der Perpendiculärlinie CD, die von dem Mittelpunct auf die Linie gezogen wird, welche die krumme Linie in A berührt, und dem Grad der strahlenbrechenden Kraft der Schichten M, n, von denen die Tangenten MT, nt ausgehen.

Beweis.

Denn TC verhält sich zu DC, wie der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels, wenn das Licht unmittelbar aus dem Mittel, welches die Schichte M ausfüllt, in das Mittel bey A übergeht. (§. 12. 19.) Weil nun die Schichten einerley bleiben, so ist diese Verhältniß unveränderlich. (§. 1.) Folglich ist die Perpendiculärlinie CT beständig in der unveränderlichen Verhältniß der Linie DC. Weil sich aber diese Verhältniß von einer Schichte zur andern nach dem verschiedenen Grade ihrer brechenden Kraft verändert, so ist offenbahr, daß die Perpendiculärlinien CT, Ct in der zusammen gesetzten Verhältniß aus den Linien DC und dem Grad der strahlenbrechenden Kraft der Schichten M und n sind, wo die Tangenten TM, tn gezogen sind.

1. Folgesatz.

§. 65. Wenn man die Perpendiculärlinien CT, Ct auf eben dieselbe Bahn bezieht, so ist die gerade Linie CD beständig von einerley Größe und = Sin. γ. Dahero hängt jede von diesen Perpendiculärlinien lediglich von dem Grade der brechenden Kraft ab, welche die ihnen entsprechende Schichten besitzen.

2. Folgesatz.

§. 66. Folglich lassen sie sich durch eine Function der Halbmesser der Schichten ausdrücken, auf welche sie sich beziehen.

3. Folgesatz.

§. 67. Bezieht man sie aber auf verschiedene Bahnen, so verhalten sie sich wie diese Function, multiplicirt durch dem Sinus des Winkels DAC.

Anmerkung.

§. 68. Diese Eigenschaft der Linien, welche auf die Tangenten perpendiculär gezogen werden können, wird in der Folge von Wichtigkeit seyn. Ich werde nunmehro das, was bishero bewiesen worden, auf den Fall anwenden, welcher wirklich bey der Athmosphäre der Erde vorkömmt.

Zweiter Abschnitt,

Von der astronomischen Strahlenbrechung; Methode, sie durch Näherung so genau zu bestimmen, als man es verlangt, und verschiedene andere Aufgaben, die damit verwandt sind.

Vortrag des Falles.

§. 69.

Man darf nur die dritte Figur auf unsre Erde und die Athmosphäre anwenden, welche sie umgiebt. Es sey dahero C der Mittelpunct der Erde und der verschiedenen Schichten der Luft. CA der Halbmesser, und der durch A beschriebene Cirkel die Oberfläche der Erde. BM eine Schichte der Luft, und bn eine andere, welche ihr unendlich nahe ist. nMA ein Lichtstrahl, welcher durch sie geht und nach A kommt. AI eine Linie, welche die Bahn des Lichts in A berührt, und IAB die scheinbare Entfernung dieses Puncts vom Zenith. Dieses vorausgesetzt, gebe man den übrigen Linien eben die Namen und Bedeutung, welche wir ihnen oben (§. 30. 58.) beygelegt haben. So ist der

Winkel TGA die Strahlenbrechung, welche das Licht leidet, indem es den Theil MA seiner Bahn in der Luft beschreibt, und wenn AM die Bahn ganz ist, so ist dieser Winkel das Maas der ganzen Strahlenbrechung.

25. Lehrsatz.

§. 70. **Wenn Ab die ganze Höhe der Atmosphäre bedeutet, so ist die Verhältniß zwischen den Perpendiculärlinien Ct und CD einerley mit der Verhältniß, welche zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, alsdenn statt finden würde, wenn das Licht unmittelbar aus dem leeren Raum in die natürliche Luft so wie sie an der Oberfläche der Erde ist, übergienge.**

Beweis.

Denn tC verhält sich zu DC wie der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels, wenn das Licht aus dem Mittel, das in n ist, unmittelbar in das Mittel übergienge, welches sich in A befindet. (§. 12. 19.) Da nun bn die äußerste Fläche der Luft ist, so ist klar, daß über diese Fläche kein ander Mittel ist, als der Ether, den man in Rücksicht auf einen mit Luft angefüllten Raum, den leeren Raum nennt. Das Mittel aber, welches sich in A befindet, ist die natürliche Luft, so wie sie an der Oberfläche der Erde ist. Folglich rc.

Anmerkung.

§. 71. Nach den Erfahrungen, welche der Herr Hawksbee angestellt hat, und aus dem,

was wir in der Folge aus der astronomischen Strahlenbrechung herleiten werden, findet man, daß diese Verhältniß niemals größer ist, als 3001 zu 3000. Folglich ist der größte Unterschied zwischen die beiden äußersten Perpendicularlinien CD, Ct jederzeit kleiner, als der $\frac{1}{3000}$ Theil der Linie CD. Es sind aber die astronomische Strahlenbrechungen, welche unter allen die größten sind, niemals über einen halben Grad; wenn man dahero diesen kleinen Unterschied aus der Acht läßt, so hat dieses zwar einen verhältnißmäßigen Einfluß auf die Strahlenbrechung, inzwischen bleibt der Fehler, welcher dadurch entsteht, allezeit kleiner als eine Secunde. Dieses giebt also folgenden

26. Lehrsatz.

§. 72. Die Strahlenbrechung ist bis auf den $\frac{1}{6000}$ Theil, dem Unterschied zwischen DAM und TM, durch CD dividirt, gleich.

Beweis.

Nach der 1sten Aufgabe (§. 59.) haben wir

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

Man multiplicire die ganze Gleichung durch u, so bekommt man

$$udz = \frac{udu}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

Man ziehe ferner auf beiden Seiten $\frac{rdr}{\sqrt{(rr - uu)}}$

ab, so erhält man

$$udz - \frac{rdr}{\sqrt{(rr-uu)}} = \frac{udu - rdr}{\sqrt{(rr-uu)}}$$

oder

$$udz = \frac{rdr}{\sqrt{(rr-uu)}} - \frac{(rdr - udu)}{\sqrt{(rr-uu)}}$$

Es ist aber $\frac{rdr}{\sqrt{(rr-uu)}}$ dem Differential dx der krummen Linie gleich, welche das Licht beschreibt, und daher ist

$$udz = dx - \frac{rdr = udu}{\sqrt{(rr-uu)}}$$

Wird diese Gleichung integrirt, so ist

$$\int udz = x - \sqrt{(rr-uu)} + Const.$$

Die beständige Größe wird dadurch bestimmt, daß $\int udz = 0$ seyn muß, wenn $x = 0$. Setzt man nun $x = 0$, so wird $r = 1$, $u = CD$, folglich ist die beständige Größe $= \sqrt{(1 - CD^2)} = DA$ und dahero

$$\int udz = AM + DA - MT.$$

Da sich aber die Perpendiculärlinie u aufs höchste um $\frac{1}{3000}$ verändern kann, so kann man sie als eine unveränderliche Größe betrachten, und der Linie DC gleich setzen, welches denn die Strahlenbrechung

$$z = \frac{AM + DA - MT}{DC} = \frac{DM - MT}{DC}$$

giebt. Es ist aber klar, daß man für DC. z

für ſudz das Product aus z und einer Perpendiculärlinie, die zwiſchen DC und CT fällt, und das Mittel zwiſchen allen hält, hätte ſetzen ſollen. Dieſe Perpendiculärlinie würde nun nicht um $\frac{1}{6000}$ größer ſeyn.

Wenn man dahero

$$z = \frac{DM - MT}{DC}$$

annimmt, ſo iſt der Fehler, den man durch dieſe Vorausſetzung begeht, kleiner, als der $\frac{1}{6000}$ Theil der Strahlenbrechung.

1. Folgeſatz.

§. 73. Für die horizontale Strahlenbrechung, beträgt alſo dieſer Fehler noch nicht eine Secunde, und für größere Höhen wird er völlig unmerklich.

2. Folgeſatz.

§. 74. Die Krümmung des Lichtſtrahls beträgt aufs höchſte einen halben Grad. Man kann alſo den Theil der Bahn MA als eine gerade Linie anſehen, und alsdenn läßt ſich nach dieſer Vorausſetzung die Strahlenbrechung durch den vorigen Lehrſatz ſehr leicht beſtimmen, ſo bald der Punct M gegeben iſt.

Anmerkung.

§. 75. Dieſer Punct M muß aber ſehr genau beſtimmt werden. Denn wenn die Lage der geraden Linie dieſelbe bleibt, ſo iſt die Perpendicularlinie CT und dahero auch die Tangente TM unveränderlich. Wenn ſich dahero die Lage des Puncts M an der Oberfläche MB verändert, ſo

verändert sich bloß die Länge des Bogens AM. Da nun die Strahlenbrechung dem Unterschied zwischen DAM und TM proportional ist, so ist klar, daß dieser Unterschied mehr oder minder groß seyn wird, nachdem sich der Punct M verändert. Ich habe übrigens diesen Lehrsatz, dergleichen in der Folge noch einige vorkommen werden, bloß deswegen angeführt, um zu zeigen, wie man ein und eben den Gegenstand aus verschiedenen Gesichtspuncten betrachten kann. Denn wenn der Punct M für jede Höhe eines Sterns gegeben ist, so hat man dieses Lehrsatzes nicht einmal nöthig, der ohnedem nur ein Beynahe giebt, sondern man kann alsdenn die Strahlenbrechung auf verschiedene Arten ganz genau durch die oben (§. 20. 21. 25. 26.) angeführte Sätze bestimmen.

2. Aufgabe.

§. 77. **Eine unendliche Reihe für die Strahlenbrechung zu finden.**

Auflösung.

Nach der ersten Aufgabe (§. 59.) ist

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

Löst man diese Formel nach dem bekannten Biomialsatz in eine Reihe auf, so bekommt man

$$dz = du \left(\frac{1}{r} + \frac{1.u^2}{2.r^3} + \frac{1.3.u^4}{2.4.r^5} + \frac{1.3.5.u^6}{2.4.6.r^7} \text{ꝛc.} \right)$$

Es ist aber die Perpendiculärlinie u in zusammen gesetzter Verhältniß aus dem Sinus des

Winkels DAC und eine Function der Höhe CM (§. 67.) Setzt man diese Function $= P$, so daß $v = P\ \text{Sin.}\,\gamma$ so wird $du = dP.\ \text{Sin.}\,\gamma$ Dieser Werth an die Stelle von du in der Reihe gesetzt giebt diese

$$dz = \frac{dP.}{r}\ \text{Sin.}\,\gamma + \frac{1.\ P^2\, dP.}{2.\ r^3}\ \text{Sin.}\,\gamma^3 + \frac{1.\ 3.}{2.\ 4.\ r^4}\ P^4 dP.\ \text{Sin.}\,\gamma^5 + \text{etc.}$$

und wenn man integrirt

$$z = \text{Sin.}\,\gamma \int \frac{dP}{r} + \frac{1}{2}\ \text{Sin.}\,\gamma^3 \int \frac{P^2 dP}{r^3} + \frac{1.\ 3.}{2.\ 4.}\ \text{Sin.}\,\gamma^5 \int \frac{P^4 dP}{r^5} + \text{etc.}$$

Alle Integrale in dieser Reihe hängen aber lediglich von der Höhe der Athmosphäre ab, und sind von dem Winkel γ völlig unabhängig, und aus diesem Grunde kann man sie als Coefficienten ansehen. Hieraus folgt denn, daß wenn der Zustand der Athmosphäre einerley bleibt, die Strahlenbrechung für jede gegebene Entfernung eines Gestirns vom Zenith durch eine Reihe von dieser Form

$$z = A\ \text{Sin.}\,\gamma + \frac{1}{2}\ \text{Sin.}\,\gamma^3 + \frac{1.3}{2.4} C\ \text{Sin}\,\gamma^5 + \text{etc.}$$

ausgedrückt werden muß, deren Glieder nach den ungeraden Dignitäten des Sinus des Winkels fortgehen, welcher die Entfernung des Gestirns vom Zenith ist.

Anmerkung.

§. 77. Diese Reihe nähert sich aber dem wahren Werth von z sehr langsam, und man muß viel Glieder berechnen, wenn man die Strahlenbrechung für geringe Höhen bestimmen will.

Denn die Function P verändert sich, so wie auch der Halbmesser r sehr wenig, und dahero können die Integrale der einzelnen Glieder wenig von einander unterschieden seyn, so daß die Coefficienten zur schnellern Näherung nicht viel mehr beytragen, als wenn die Coefficienten 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{24}$ ꝛc. nur allein da wären.

Will man aber eine Reihe haben, welche geschwinder convergirt, so muß man diese Reihe in eine andere verwandeln, deren Glieder nach den ungeraden Dignitäten der Tangente des Winkels γ fortgehen. Dieses kann aber allezeit geschehen, und man findet (*)

$$z = A\,\mathrm{Tng.}\gamma - \frac{1}{2} A\,\mathrm{Tng.}\gamma^3 + \frac{1.3.}{2.4.} A\,\mathrm{Tng.}\gamma^5 + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{1}{4} B\,\mathrm{Tang.}\gamma^3 + \frac{3.2.}{2.4.} B\,\mathrm{Tong.}\gamma^5 + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{1.3.}{2.4.} C.\,\mathrm{Tang.}\gamma^5 + \text{ꝛc.}$$

(*) Es ist $\mathrm{Sin.}\gamma = \mathrm{Tang.}\gamma.\,\mathrm{Cos.}\gamma. = \frac{\mathrm{Tang.}\gamma}{\mathrm{Sec.}\gamma.}$

$= \mathrm{Tang.}\gamma\,(1 + \mathrm{Tang.}\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$

Nach dieser Formel darf man nur die Dignitäten des Sinus des Winkels γ ausdrücken, und sie wieder in unendliche Reihen verwandeln. Ue.

Wären alle Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. einander gleich, so würden alle Glieder dieser Reihe bis auf das erste verschwinden, und man würde schlechthin

$$z = A \text{ Tang. } \gamma$$

bekommen. Da aber diese unveränderliche Größen A, B, C, ꝛc. nur sehr wenig von einander verschieden sind, so folgt daraus, daß diese Reihe unendlich geschwinder convergiren muß, als die erste, weil der Coefficient des ersten Gliedes in beiden einerley ist, und die Tangenten weit stärker ab- und zunehmen, als die Sinus ꝛc.

Anmerkung.

Daß die Coefficienten A, B, C, ꝛc. wenig von einander unterschieden sind, läßt sich auf folgende Art beweisen.

Man lasse die Schichte, welche zwischen n und m ist, nicht die äußerste Schichte der Atmosphäre, sondern eine jede andre bedeuten. Weil nun die strahlenbrechende Kräfte der Schichten, die unmittelbar auf einander folgen, nicht sehr verschieden sind, so wird

$$\text{Sin. } Cnt : \text{Sin. } CnT = 1 + d\varrho : 1$$

folglich $\text{Sin. } Cnt = (1 + d\varrho) \text{ Sin } CnT$

Es ist aber der Winkel $TMC = \omega$ (§. 59.)

Wenn demnach der Winkel $ACM = \varphi$ gesetzt wird, so ist $MCn = d\varphi$

$$Cnt = \omega + d\omega$$

$$CnT = \omega - d\varphi$$

und $\text{Sin. } Cnt = \text{Sin. } \omega + d\omega \text{ Cos. } \omega$

$$\text{Sin. } CnT = \text{Sin. } \omega - d\varphi \text{ Cos. } \omega$$

Demnach wird

$$\mathrm{Sin.}\,\omega + d\omega\,\mathrm{Cos.}\,\omega = (1 + d\rho)(\mathrm{Sin.}\,\omega - d\varphi\,\mathrm{Cos.}\,\omega)$$

oder

$$\mathrm{Sin.}\,\omega + d\omega\,\mathrm{Cos.}\,\omega = \mathrm{Sin.}\,\omega + d\rho\,\mathrm{Sin.}\,\omega - d\varphi\,\mathrm{Cos.}\,\omega + d\rho\,d\omega\,\mathrm{Cos.}\,\omega.$$

Läßt man das Glied $d\rho\,d\omega\,\mathrm{Cos.}\,\omega$ als unendlich klein in Absicht auf die andern weg, so wird

$$(d\omega + d\varphi)\,\mathrm{Cos.}\,\omega = d\rho\,\mathrm{Sin.}\,\omega$$

oder

$$\frac{d\omega}{\mathrm{Tang.}\,\omega} + \frac{d\varphi}{\mathrm{Tang.}\,\omega} = d\rho$$

Es ist aber $Mn = r\,d\varphi$ und $mn = dr$

und $nm : Mn = 1 : \mathrm{Tang.}\,\omega$

folglich $\mathrm{Tang.}\,\omega = \dfrac{r\,d\varphi}{dr}$

Demnach

$$d\rho = \frac{d\omega}{\mathrm{Tang.}\,\omega} + \frac{dr}{r}$$

und hieraus durch die Integration

$$\rho = \mathrm{Log.\,Const.} + \mathrm{Log.\,Sin.}\,\omega + \mathrm{Log.}\,r.$$

oder $e^{\rho} = Cr\,\mathrm{Sin.}\,\omega$

Um die beständige Größe C zu bestimmen, setze man ρ werde σ wenn $u = CA = a$ und $\omega = DAC = \gamma$ wird, so haben wir

$$e^{\sigma} = CA\,\mathrm{Sin.}\,\gamma$$

Dahero ist $C = \dfrac{e^{\sigma}}{a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma}$

Folglich

$$e^{\varrho - \sigma} = \frac{r \text{ Sin. } \omega}{a \text{ Sin. } \gamma}$$

oder

$$e^{\varrho} : e^{\sigma} = Ct : CD$$

Wäre nun Ct die äusserste Perpendiculärlinie, so wäre nach §. 71. die Verhältniß zwischen CD und Ct nicht grösser als 3000 : 3001. Da aber Ct eine jede mittlere Perpendiculärlinie bedeuten kann, so muß diese Verhältniß noch geringer seyn. Man sieht hieraus, daß dieser Bruch $\frac{r \text{ Sin. } \omega}{a \text{ Sin. } \gamma}$ nicht viel grösser ist als 1. und dahero wird $\varrho - \sigma$ allezeit eine sehr kleine Zahl seyn.

Nunmehro haben wir die Perpendiculärlinie $u = r \text{ Sin. } \omega = P \text{ Sin. } \gamma$ gesetzt, folglich ist nach dem, wie wir hier gefunden

$$a \text{ Sin. } \gamma \, e^{\varrho - \sigma} = P \text{ Sin. } \gamma$$

folglich $P = a e^{\varrho - \sigma}$

oder $P = a + a(\varrho - \sigma)$

und $\varrho - \sigma$ ist beständig eine sehr kleine Zahl.

Setzen wir nnn $a = r - c$

so wird auch c eine kleine Grösse, und man hat

$$P = r - c + a(\varrho - \sigma)$$

und $$\frac{P}{r} = 1 - \frac{(c - a(\varrho - \sigma))}{r}.$$

so daß $\frac{c - a(\varrho - \sigma)}{r}$ eine sehr kleine Größe ist, die man beynahe weglassen könnte. Setzt man nun $\frac{c - a(\varrho - \sigma)}{r} = m$

so wird

$$\frac{P}{r} = 1 - m$$

$$\frac{P^2}{r^2} = 1 - 2m$$

$$\frac{P^3}{r^3} = 1 - 3m$$

ꝛc. ꝛc.

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung, so sieht man offenbar, daß die Coefficienten sehr wenig von einander verschieden seyn müssen, und daß aus diesem Grunde die Reihe sehr langsam convergiren muß.

Folgesatz.

§. 78. Man kann demnach die Strahlenbrechung durch eine Reihe von dieser Form

$z = a \,\text{Tang.}\, \gamma - b \,\text{Tang}\, \gamma^3 + c \,\text{Tang.}\, \gamma^5 +$ ꝛc.

ausdrücken. Nimmt man die horizontale Strahlenbrechung aus, weil dafür die Tangente des Winkels γ sehr groß wird, so sind für die übrigen wenig Glieder hinreichend.

3. Aufgabe.

§. 79. Wenn die Strahlenbrechung für einige Winkel gegeben ist, alle übrigen zu finden, wenn sie der horizontalen nicht zu nahe sind.

Auflösung.

Man darf bloß die gegebene Strahlenbrechungen nehmen, und dadurch die Coefficienten der Reihe

$z = a \text{ Tang.} \gamma - b \text{ Tang.} \gamma^3 + c \text{ Tg.} \gamma^5 - $ ꝛc.

bestimmen. Die bequemste und leichteste Art, wie dieses geschehen kann, ist folgende:

1. Man setzt das erste Glied a Tang. γ einer Strahlenbrechung gleich, welche zu einem Winkel γ von 40 bis 45 Grad gehört. Dadurch bekommt man den Werth des Coefficienten a, den man denn dafür setzt.

2. Hierauf setze man die beiden ersten Glieder einer Refraction gleich, welche zu einem andern Winkel γ gehört, der größer ist; z. E. von 60 bis 65 Grad, und dieses giebt den Werth des Coefficienten b. Dieser wird ebenfalls in dessen Stelle gesetzt, und denn setzt man

3. Die drey ersten Glieder einer Refraction gleich, welche zu einem Winkel γ gehört, der noch größer z. B. 75 bis 80° ist. Dadurch erhält man denn den dritten Coefficienten, und auf diese Art fährt man fort, die Coefficienten der übrigen Glieder zu bestimmen.

Anmerkung.

§. 80. Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß der Coefficient eines jeden folgenden Gliedes zu klein ist, als daß er auf die Bestimmung der vorhergehenden einen sonderlichen Einfluß haben könnte, so daß, wenn man eine geschickte Wahl unter den Strahlenbrechungen zu treffen weiß, man sie allezeit weglassen kann. Ich will nunmehro ein Beyspiel dazu geben. Die Strahlenbrechungen, die man in verschiedenen Büchern findet, sind aber zu verschiedenen Zeiten, und dahero nicht bey einerley Zustande der Athmosphäre beobachtet worden, und aus diesem Grunde werde ich besser thun, wenn ich mich der Tafel bediene, die Hr. Daniel Bernouilli gegeben, und sich in seinem fürtreflichen Werke, die Hydrodynamik, befindet. Nicht zwar deswegen, weil sie mit den Beobachtungen aufs genaueste übereinstimmt, sondern weil sie nach einer Hypothese berechnet werden, die für jede Höhe der Gestirne einerley Zustand der Luft voraussetzt, ohngeachter sie auch ohnehin der Wahrheit ziemlich nahe kommt. Da sich die Reihe, welche ich gegeben, auf alle Fälle anwenden läßt, so ist es gleichgültig, welchen ich nehme, wenn er nur die Bedingungen hat, die ich vorausgesetzt habe.

Dieses ist aber die Tafel des Hrn. Bernoulli.

γ	z	γ	z
90″	34′ . 53″	45	1′ : 3″
85	9 . 59	40	0 . 53
80	5 . 28	35	0 . 44⅓
75	3 . 59	30	0 . 36½
70	2 . 47	25	0 . 29½
65	2 . 12	20	0 . 23
60	1 . 47	15	0 . 17
55	1 . 29	10	0 . 11¼
50	1 . 15	5	0 . 5½
45	1 . 3	0	0 . 0

Beyspiel.

§. 81. Aus dieser Tafel nehme ich folgende drey Strahlenbrechungen.

γ	z
45°	63″
60°	107″
80°	328″

Dieses giebt für den ersten Coefficienten

$$a \text{ Tang } 45° = 63''$$
$$a = 63''$$

Für den zweiten

$$63° \text{ Tang } 60° - b (\text{Tang } 63°)^3 = 107.$$

und daraus bekomt man

$$b = 0,408$$

Für den dritten ist

$$63 \text{ Tag } 80° - 0,408 (\text{Tag } 80°)^3 +$$
$$c (\text{Tag } 80°)^5 = 328$$

Welches $c = 0,011$

giebt. Für die Strahlenbrechung aller Winkel γ die unter 80° sind, bekomt man demnach

$$z = 63 \text{ Tag } \gamma - 0,408 \text{ Tang } \gamma^3 + 0,001 \text{ Tag } \gamma^5$$

So findet man z. B. für den Winkel

$\gamma = 70°$ die Strahlenbrechung

$$z = 173,1 + 1,7 - 8,4 = 166'',4$$

oder

$$z = 2' \; 46\tfrac{1}{2}''$$

und dieser Werth ist von dem Werth 2′, 47″ den die Tafel für diesen Winkel giebt, nur um eine halbe Secunde unterschieden.

27. Lehrsatz.

§. 82. Wenn man eine Schichte BM, welche man will, und ihre Entfernung CM vom Mittelpunct als unveränderlich annimt, so läst sich die astronomische Strahlenbrechung durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder nach den ungeraden Dimensionen entweder des Sinus oder der Tangente des Winkels TMC oder nach den geraden Dignitäten des Cosinus oder der Cotangente desselben fort gehen.

Beweis.

Weil die Schichte in allen Fällen unveränderlich bleibt, so ist die Verhältniß des Sinus des Winkels TMC zum Sinus des Winkels γ oder DAC auch unveränderlich. (§. 17.) Setzt man dahero den Winkel TMC = E und m Sin. E = Sin. γ und setzt diesen Werth in der (§. 74.) angeführten Reihe für Sin. γ so bekommt man

$$z = A\,m\,\text{Sin.}\,E + \tfrac{1}{2}\,B\,m^3\,\text{Sin.}\,E^3 + \text{etc.}$$

Dieses beweist also die Richtigkeit des Satzes in Ansehung des Sinus des Winkels E. Eine geringe Kenntnis der Trigonometrischen Formeln zeigt dieses auch in Absicht auf die Tangente, den Cosinus und Cotangente des Winkels E.

Folgesatz.

§. 83. Die Reihen also, welche man für die ganze Strahlenbrechung findet, sind von denjenigen, welche nur einen Theil derselben ausdrücken, der zwischen zwey beliebigen Schichten der Luft statt findet, blos in Ansehung der Coefficienten unterschieden. Wir fanden §. 76. für die ganze Strahlenbrechung diese Reihe

$$z = a\,\text{Tang.}\,\gamma - b\,\text{Tang.}\,\gamma^3 + c\,\text{Tang.}\,\gamma^5 - \text{etc.}$$

Für die Strahlenbrechung zwischen den beiden Schichten A und M werden wir demnach folgende bekommen:

$$z = \mu\,\text{Tang.}\,\gamma - \nu\,\text{Tang.}\,\gamma^3 + \pi\,\text{Tang.}\,\gamma^5 - \text{etc.}$$

und für eben dieselbe zwischen jeden zwey andern Schichten

$$z' = m\,\text{Tang.}\,\gamma - n\,\text{Tang.}\,\gamma^3 + \text{etc.}$$

Anmerkung.

§. 84. Das einzige Mittel, um diese Reihen zu finden, und sie auf eine ganz allgemeine Art, und ohne dabey eine Hypothese zum Grunde zu legen, auf die Strahlenbrechungen anzuwenden, bestand darinnen, daß ich den Sinus des Win-

kels y der in dem Differential $\frac{du}{\sqrt{rr-uu}}$ und besonders unter dem Wurzelzeichen vorkommt, von den andern Größen, welche allein von der Höhe der verschiedenen Schichten der Athmosphäre abhängen und eine Function davon sind, abzusondern suchte, so daß, weil sich die Integration nicht auf eine ganz allgemeine Art vornehmen ließ, doch der Sin. y davon abgesondert war, und das Integral als eine unveränderliche Größe angesehen werden konnte. Es war mir nicht möglich, dieses durch einen endlichen Ausdruck, oder doch wenigstens durch einen von denen zu bewerkstelligen, die man imaginär nennt, dergleichen man verschiedene für die Theilung der Cirkelbögen, und für verschiedene andere Fälle gefunden hat. Wenn man aber unendliche Reihen zu Hülfe nimmt, so kann man noch verschiedene finden, um die Strahlenbrechung auszudrücken.

4. Aufgabe.

§. 85 Der Punct G, wo sich die Tangenten AI, TM durchschneiden, und die Verhältniß des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels, wenn das Licht unmittelbar aus der Luft, welche sich bey M befindet, in derjenigen fällt, welche bey A ist, werden gegeben: man soll bestimmen, wie groß die Strahlenbrechung sey, wenn das Licht in der Linie MA fortgeht..

Auflösung.

Die Verhältniß zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, wenn das Licht unmittelbar aus der Luft, welche bey M ist, in diejenige übergeht, welche sich um A befindet, ist der Verhältniß der Perpendiculärlinien CT, CD gleich (§. 12. 13. 14.) weil sie die Sinus der Winkel DGC, TGC sind, wenn man die gerade Linie DG für den Halbmesser annimmt. Weil nun der Punct G gegeben ist, so weis man den Winkel AGC, dessen Sinus mit dem Sinus des Winkels TGC in der angezeigten Verhältniß steht. Da ferner diese Verhältniß gegeben wird, so bekommt man dadurch den Sinus des Winkels TGC, folglich den Winkel selbst. Zieht man alsdenn den Winkel DGC davon ab, so erhält man den Winkel TGD, welcher die Strahlenbrechung ausdrückt, die man finden sollte.

Folgesatz.

§. 86. Wenn dahero die Schichten A und M bleiben, und der Punct G wird für jeden Abstand vom Zenith gegeben, so darf man nur erst durch eine Strahlenbrechung die Verhältniß der Perpendiculärlinien CT, CD bestimmen, so findet man denn, weil diese Verhältniß für alle Winkel BAG beständig dieselbe bleibt (§. 19.) alle übrige Strahlenbrechungen.

1. Anmerkung.

§. 87. Da diese Aufgabe und der daraus gezogene Satz für alle Schichten richtig ist, so ist klar, daß auch der Fall dahin gehört, wo man

die beiden äußersten nimmt. Dahero lassen sich die astronomische Strahlenbrechungen, wenn der Punct G gegeben wird, ebenfalls bestimmen.

2. Anmerkung.

§. 88. Ich habe bereits oben (§. 16.) angemerkt, daß die Puncte G nicht gleich weit vom Mittelpunct C der Erde entfernt sind. Wäre dieses, so ließen sich die astronomische Strahlenbrechungen in der Hypothese, daß das Licht nur einmal gebrochen wird, und alsdenn in der Luft in einer geraden Linie fortgeht, aufs genaueste bestimmen. Da inzwischen diese Voraussetzung bey großen Erhöhungen so ziemlich mit den Beobachtungen übereinstimmt, so folgt daraus, daß die Puncte G in einer krummen Linie liegen müssen, welche nicht viel von dem Cirkel abweicht. Die Höhe der Athmosphäre, welche man nach dieser Hypothese glaubte bestimmt zu haben, ist inzwischen nichts weiter, als die Entfernung des Puncts G von der Oberfläche der Erde, die in den mehresten Fällen weit kleiner ist, als die Entfernung desselben von den äußersten Gränzen der Luft; denn die Krümmung des Lichts ist nahe an der Oberfläche der Erde, weit stärker, als in den obern Schichten des Dunstkreises.

3. Anmerkung.

§. 89. Diese Eigenschaft des Puncts G giebt ein Mittel an die Hand, die Genauigkeit der beobachteten Strahlenbrechungen zu prüfen. Denn wenn eine Refraction gegeben ist, die zu einem gewissen Winkel DAC gehört, so macht

man den Winkel DCT derselben gleich, und alsdenn bekommt man durch Hülfe der gegebenen und beständigen Verhältniß der Perpendiculärlinien DC, und TC die Entfernung CT, von der man die Linie CV = DC. Sec. z abzieht, um die Linie TU zu erhalten. Nimmt man nun TG = TU. Cot. z oder UG = TU. Cosec. z so bekommt man alsdenn den Punct G. So bestimmt man ebenfalls die Puncte G für die übrigen Strahlenbrechungen, die beobachtet worden, und diese Puncte müssen alsdenn in einer krummen Linie liegen, welche wenig von einem Cirkelbogen unterschieden seyn muß, dessen Mittelpunct in der Linie CA liegt. Ein geringer Fehler in den Beobachtungen macht aber gleich, daß diese Puncte G sehr aus derjenigen Linie gerückt werden, in der sie sich befinden sollten. Denn die Entfernung TG verändert sich in Verhältniß der Cotangente des Winkels, welcher die Strahlenbrechung ausdrückt, folglich sehr geschwinde, besonders alsdenn, wenn der scheinbare Abstand vom Zenith und dahero auch die Strahlenbrechung sehr klein ist. Kehrt man aber den Fall um, so kann man die Strahlenbrechung für kleinere Höhen, z. B. unter 10 oder 15 Grad sehr genau bestimmen, ohne daß man eben nöthig hat, den Punct G sehr genau zu wissen.

4. Anmerkung.

§. 90. Die Auflösung der Aufgabe und die Prüfung der beobachteten Strahlenbrechungen

beruhet lediglich auf die Verhältniß der Perpendicularlinien CD und CT, welche bekannt seyn muß. Diese kann man aber ziemlich genau finden, wenn eine Refraction bekannt ist, die zu einer mittlern Höhe, das ist, zu einer Höhe von ohngefehr 45° gehet. Denn weil die Entfernung des Puncts G von der Oberfläche der Erde sehr geringe ist, und bey dieser Höhe es eben nicht darauf ankommt, ob man sie etwas größer oder kleiner annimmt, so kann man setzen, der Punct G falle in den Punct A, welches denn folgende Proportion giebt:

$$CD : CT = \text{Sin.}\,\gamma : \text{Sin.}\,(\gamma + z)$$

oder

$$CD : CT = 1 : \text{Cos.}\,z + \text{Cotg.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,z.$$

Anmerkung.

Setzt man die Verhältniß $CT : CD = m : 1$; und $CA = a$ $CG = y$ so wird $CT = m\,a\,\text{Sin.}\,\gamma$; $CU = \frac{a\,\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,z}$

$$TU = \frac{(m\,\text{Cos.}\,z - 1)}{\text{Cos.}\,z} \cdot a\,\text{Sin.}\,\gamma$$

$$TG = \frac{(m\,\text{Cos.}\,z - 1)}{\text{Sin.}\,z} \cdot a\,\text{Sin.}\,\gamma$$

Folglich

$$y = \frac{a\,\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,z} \sqrt{(m^2\,\text{Sin.}\,z^2 + (m\,\text{Cos.}\,z - 1)^2)}$$

oder

$$y = \frac{a\,\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,z.} \sqrt{(m^2 + 2\,m\,\text{Cos.}\,z + 1)}$$

das ist

$$y = \frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma}{\mathrm{Sin.}\,z} \sqrt{(\mathrm{Sin.}\,z^2 + (m - \mathrm{Cos.}\,z)^2)}$$

Sucht man hieraus den Werth von m, so ist selbiger

$$m = \mathrm{Cos.}\,z \mp \frac{\mathrm{Sin.}\,z}{a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma} \sqrt{(y + a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma)(y - a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma)}$$

2. Anmerkung.

Weil der Punct G in einer Linie liegt, die einem Cirkel ziemlich nahe kommt, dessen Mittelpunct in der Linie CA ist. (§. 88.) so kann man auch die Verhältniß CT : CD oder den Werth von m bestimmen, wenn man zwey Beobachtungen von Strahlenbrechungen hat, die zu Höhen gehören, die ziemlich groß und nicht allzu sehr von einander verschieden sind. Man kann alsdenn die Entfernungen der beyden Puncte G von C gleich groß annehmen. Läßt man demnach y', z', γ', das bedeuten, was vorhin y, z, γ waren, so hat man

$$\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma}{\mathrm{Sin.}\,z} \sqrt{(\mathrm{Sin.}\,z^2 + (m - \mathrm{Cos.}\,z)^2)} =$$

$$\frac{a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma'}{\mathrm{Sin.}\,z'} \sqrt{(\mathrm{Sin.}\,z'^2 + (m\,\mathrm{Cos.}\,z' -)^2}$$

Weil nun z und z' nur Bögen von einigen Minuten sind, so kann man $\mathrm{Sin.}\,z = z$; $\mathrm{Sin.}\,z' = z'$ und $\mathrm{Cos.}\,z = 1 = \mathrm{Cos.}\,z'$ setzen. Nimmt man ferner $z' = \lambda z$ und löst die Gleichungen gehörig auf, so findet man

$$m - 1 = \lambda z \times \sqrt{\frac{(\text{Sin.}\,\gamma + \text{Sin.}\,\gamma')\,(\text{Sin.}\,\gamma - \text{Sin.}\,\gamma')}{(\text{Sin.}\,\gamma' + \lambda\,\text{Sin.}\,\gamma)\,(\text{Sin}\,\gamma' - \lambda\,\text{Sin}\,\gamma)}}$$

dadurch denn leicht der Werth von m gefunden wird.

5. Aufgabe.

§. 91. Es wird die Verhältniß der Perpendiculärlinien CD, DT und zwey Strahlenbrechungen, welche beynahe horizontal sind, gegeben, man soll die Strahlenbrechung für alle übrige Höhen bestimmen.

Auflösung.

Weil die krumme Linie, in der sich alle Puncte G befinden, wenig von einem Cirkelbogen abweicht, dessen Mittelpunct in der geraden Linie AC liegt, die durch C den Mittelpunct der Erde und A den Ort der Beobachtung geht; so ist klar, daß wenn man diese krumme Linie wirklich für einen Cirkelbogen annimmt, man nur noch zwey Puncte darinnen finden darf, um denselben beschreiben zu können. Da nun die Verhältniß der Perpendicularlinien CD CT gegeben wird, so findet man durch die in der dritten Anmerkung zur vorigen Aufgabe gezeigte Methode zwey Entfernungen AG für die beiden gegebenen Winkel BAG. Es sey demnach A der Ort (Fig. 4.) wo die Beobachtung gemacht worden, G, g die beiden gegebenen Puncte, QBgG der Cirkel, welcher durch diese Puncte geht, und dessen Mittelpunct in der Verticallinie AE in C ist.

Man setze

den Winkel BAG $= \gamma$

BAG $= \gamma'$

Die Linie Ag $=$ a

AG $=$ A

und AC $=$ x

und verlängere die Linien Ag, AG bis q und Q, und ziehe darauf die Linien Cp, CP perpendiculär, so wird

$$AP = x \, \text{Cos.} \, \gamma'$$
$$Ap = x \, \text{Cos.} \, \gamma$$

und dahero

$$AQ = A + 2x \, \text{Cos.} \, \gamma'$$
$$Aq = a + 2x \, \text{Cos.} \, \gamma$$

Es ist aber nach der Natur des Cirkels

$$AQ.AG = Ag.Aq.$$

Folglich

$$AA + 2Ax \, \text{Cos.} \, \gamma' = aa + 2ax \, \text{Cos.} \, \gamma$$

und also

$$x = \frac{AA - aa}{2(a \, \text{Cos.} \, \gamma - A \, \text{Cos.} \, \gamma')}$$

Ist aber der Winkel $\gamma' = 90°$ so wird

$$x = \frac{AA - aa}{2a \, \text{Cos.} \, \gamma} = \frac{(A + a)(A - a)}{2a \, \text{Cos.} \, \gamma}$$

Nachdem auf diese Art die Entfernung des Mittelpuncts C von der Oberfläche A gefunden, so kann man den Cirkel BG beschreiben. Es ist aber in diesem Falle der Calcul besser, als die Construction, und dahero muß man noch die

Entfernung BA finden, um den Halbmesser BC zu bekommen.

Nach den Eigenschaften des Cirkels ist aber

$$BA.\ AE = AQ.\ AG.$$

woraus denn

$$BA.(2AC + BA) = AQ.\ AG$$

Folglich

$$BA = -AC + \sqrt{(AC^2 + AG.\ AQ.)}$$

und $$CB = \sqrt{(AC^2 + AQ.\ AG)}$$

wird. Nachdem endlich diese Stücke gefunden worden, so findet man für jeden Winkel γ die Entfernung A g. Denn weil

$$Ag.\ Aq = AB.\ AE$$

und $$Aq = Ag + 2\,AC\,Cos.\,\gamma$$

so wird

$$Ag^2 + 2Ag.\ AC.\ Cos.\,\gamma = AB.\ AE$$

woraus man

$$Ag = -AC\,Cos.\,\gamma + \sqrt{(AB.AE + AC^2.Cos.\,\gamma^2)}$$

bekommt.

Weil aber die Entfernung AG (Fig. 3.) bekannt ist, so ist

$$GD = AG + Cos.\,\gamma$$

$$DC = Sin.\,\gamma$$

und $$CG = \sqrt{(AG^2 + 2\,AG\,Cos.\,\gamma + 1)}$$

so daß nunmehro die Strahlenbrechung durch die vorige Aufgabe gefunden werden kann.

Oder wenn man $\dfrac{CT - CD}{CD} = n$

setzt $$z = \frac{DG - \sqrt{(DG^2 - 2n.DC^2)}}{DC}$$

Sind endlich die Winkel γ sehr klein, so ist es genug, wenn man

$$z = \frac{n . DC}{DG}$$

setzt.

Anmerkung.

§. 92. Diese Auflösung beruhet auf die Voraussetzung, daß die krumme Linie, welche durch die Puncte G geht, sehr wenig von einem Cirkelbogen abweicht, so daß dieser selbst für die krumme Linie angenommen werden kann. Weil aber die Lage des Puncts G für die Winkel γ welche sehr klein sind, sehr willkührlich ist, so kann man einen Cirkelbogen nehmen, welcher durch die Puncte G geht, die zu Strahlenbrechungen für sehr kleine Höhen gehören, und beynahe horizontal sind. Ich will anjetzt diese Methode durch ein Beispiel erläutern, und dabey lege ich ebenfalls die Tafel des Herrn Bernouille für die Strahlenbrechungen zum Grunde, welche ich schon oben §. 80. angeführt habe.

Beispiel.

§. 93. Fürs erste muß die Verhältniß der Perpendiculärlinien CD, CT gefunden werden. Dazu nehme ich nun die Strahlenbrechung 63″ welche zu dem Winkel $\gamma = 45°$ gehört. Dieses giebt nach §. 90.

$$CD : CT = 1 : (\text{Cos}. 63'' + \text{Sin}. 63'')$$

folglich

$$CD : CT = 1 : 1{,}000\,305\,4$$

Demnach

$$n = 0,000\,3054.$$

Nunmehro nehme ich aus der Tafel zwey Strahlenbrechungen für die Winkel

$$\gamma' = 90^\circ \qquad z = 34' \, 53''$$
$$\gamma = 85^\circ \qquad z = 9' \, 59''$$

Durch diese findet man entweder nach der §. 89. gezeigten Methode, oder durch Hülfe der Formel

$$AG = (n \, \text{Cosec.} \, z + \text{Tang.} \, \tfrac{1}{2} z) \, DC - AD$$

für den ersten Fall

$$AG = 0,0351 = A$$

und für den zweiten

$$Ag = 0,0191 = a$$

Demnach

$$AC = x = \frac{(A + a)(A - a)}{2 \, a \, \text{Cos.} \, \gamma} = 0,2605$$

Hieraus sieht man, daß die Entfernung AC kaum der vierte Theil des Halbmessers der Erde, und folglich der Bogen BG ohngefähr von acht Graden ist.

Da AC gefunden worden, so bekommt man auch durch die Formel

$$BA = - AC + \sqrt{(AC^2 + AG^2)}$$

$$BA = 0,00235$$
$$CB = 0,26285$$
$$AE = 0,52335$$

so daß die Höhe BA ohngefehr zwey teutsche Meilen beträgt.

Diese Größen, welche gefunden worden, können nunmehro als gegebene zum Grunde gelegt werden, um jede andre Strahlenbrechung zu finden. Denn wenn man in der Formel

$$AG = -AC\,Cos.\gamma + \sqrt{(AB.AE + AC^2\,Cos.\gamma^2)}$$

die oben gefundene Werthe setzet, so findet man für jede gegebene Entfernung Ag

$$Ag = -0,2605\,Cos.\gamma + \sqrt{(0,000123 + 0,06786\,Cos.\gamma^2)}$$

und

$$z = \frac{DG - \sqrt{(DG^2 - 2n.DC^2)}}{DC}$$

Z. B. für dem Winkel $\gamma = 80^\circ$ findet man durch die erste Gleichung

$$Ag = 0,00133$$

und durch die zweite

$$z = 0,00169$$

und wenn man diese Zahl in Minuten und Secunden verwandelt, so bekommt man 5′ 28″ für die Strahlenbrechung, genau so wie sie die Tafel angiebt.

Anmerkung.

§. 94. Weil die Strahlenbrechungen, welche man bey dieser Methode zum Grunde legt, sehr genau und richtig seyn müssen, so muß man sie vorhero auf die Art, welche §. 89. angegeben werden, untersuchen, ehe man sich ihrer bedient, um die übrigen zu finden.

Wenn man diese Untersuchung anstellt, so wird man leicht gewahr, ob sie zu groß oder zu

klein sind, und man ist im Stande, sie zu verbessern. Eben dieses muß man auch beobachten, wenn man sich ihrer bedienen will, um die Coefficienten der Reihe für die Strahlenbrechung zu bestimmen. Uebrigens sind diese Methoden ungemein genau, und lassen sich überall anwenden, der Zustand der Luft mag beschaffen seyn wie er will. Dahero sieht man, daß man dadurch die astronomische Beobachtungen, welche von den Strahlenbrechungen abhängen, zu einem hohen Grade der Schärfe und Vollkommenheit bringen kann.

Denn man darf nur zu eben der Zeit, da man Beobachtungen anstellt, einige Strahlenbrechungen beobachten, so kann man dadurch alle diejenigen, welche man verlangt, bestimmen.

Anmerkung.

Man hat längst angemerkt, daß man bey der astronomischen Strahlenbrechung zugleich mit auf den Zustand der Luft sehen müsse, welcher durch die Barometerhöhen und Grade des Thermometers angezeigt wird. In wie fern sie aber davon abhängt, ist noch nicht völlig ausgemacht. Da man das Gesetz kennt, nach dem die Reihe fortgeht, welche die Strahlenbrechung ausdrückt, so könnte man durch einigen mit aller erforderlichen Genauigkeit angestellten Beobachtungen für jeden Stand des Barometers und Thermometers die Strahlenbrechung bestimmen, und durch Gegeneinanderhaltung vieler solcher Erfahrungen, nach der von dem Herrn Verfasser

in seinen Beyträgen zur Mathematik angegebenen Methode (1 Theil Seite 424.) die Abhänglichkeit dieser Stücke von einander auszumachen suchen.

Mayer giebt eine Formel an, in der er dei Barometer Höhen und Grade des Reaumirschen Thermometers mit herein gebracht hat. Diese sieht nun in seinen Tabulis motuum Solis et Lunae &c. Londini 1770 so aus.

Wenn man

den scheinbaren Abstand vom Zenith $= \gamma$
die Höhe des Barometers nach
Pariser Zolle $=$ a.
Den Grad des Reaumurschen Thermometers über den Gefrierpunct $=$ g
und die Strahlenbrechung $=$ z

setzt.

$$z = \frac{70'',71 . a \text{ Sin.} \gamma}{\sqrt{(1 + 0{,}0046 g)^3}} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{(16\tfrac{1}{2} \text{Cos.} \gamma)^2}{(1 + 0{,}0046 g)} \right)} - \frac{16\tfrac{1}{2} \text{ Cos.} \gamma}{\sqrt{(1 + 0{,}0046 g)}} \right]$$

und diese läßt sich leicht für das Fahrenheitsche Thermometer einrichten, weil, wenn f den Grad dieses Thermoters über o anzeigt,

$$g = \frac{f - 32}{2}$$

ist. Weil nun überhaupt Cosec. ω — Cot. ω $=$ Tang. $\frac{1}{2}\omega$ ist, so sucht man einen Bogen ω dessen Tangente $\frac{\sqrt{(1 + 0{,}0046 g)}}{16\frac{1}{2} \text{ Cos.} \gamma}$ ist, und

denn wird

$$z = \frac{70'',71\, a \,\mathrm{Sin.}\, \gamma}{\sqrt{(1+0,0046g)^3}}\ \mathrm{Tang.}\tfrac{1}{2}\,\omega$$

Nach dieser Formel hat Mayer seine Tafeln für für die Strahlenbrechung berechnet. Er hat sie aus der Theorie hergeleitet, und versichert, daß sie der Wahrheit ziemlich nahe kommen soll. Der Coefficient $\frac{1}{1+0,0046g}$ der die Veränderung der Strahlenbrechung angiebt, in so fern sie von den Graden des Thermometers abhängt, zeigt die Dichtigkeit der Luft an, welche sie bey g Graden des Reaumürschen Thermometers hat, wenn ihre Dichtigkeit bey 0 Graden oder dem Gefrierpunct = 1 angenommen wird.

Dritter Abschnitt,

Von den Strahlenbrechungen, wenn die Bahn des Lichts als ein Cirkelbogen betrachtet wird, ihren Gebrauch um die Strahlenbrechungen nahe bey der Oberfläche der Erde zu bestimmen, und verschiedene andere Aufgaben, welche so wohl von der astronomischen als derjenigen Strahlenbrechung abhängen, die nahe an der Oberfläche der Erde statt findet.

6. Aufgabe.

§. 95.

Die Strahlenbrechung zu bestimmen, wenn man annimmt, die Bahn des Lichts sey ein Theil eines Cirkels.

Auflösung.

Man lasse (Fig. 5.) AI, BH zwey Schichten desjenigen Mittels bedeuten, welches so beschaffen ist, daß das Licht darinnen so gebrochen wird, daß es in einem Cirkelbogen fortgeht, und AgG, AhH zwey Bögen seyn, in denen das Licht fortgeht, deren Mittelpuncte E und F sind. Man vereinige die Puncte A, G, F, und A, H, E, durch gerade Linien, damit man die

Triangel AGF, AHE bekomme, und ziehe durch A und den Mittelpunct C die Verticallinie BD und endlich durch die Mittelpuncte F und E die gerade Linie FE, welche man bis D verlängert. Alle diese gezogene Linien werden nun von einander folgender Gestalt abhängen.

1. FD ist auf BD perpendiculär (§. 38. 39.)

2. Die Mittelpuncte aller übrigen Bögen, in denen das Licht fortgeht, liegen in der geraden Linie FD.

3. Die Strahlenbrechung in der Linie AhH ist = AEH und = AFG in der Linie AgG.

4. Die Halbmesser AE, AF verhalten sich wie die Cosecanten der Entfernungen vom Zenith (§. 38.)

5. Die Strahlenbrechungen verhalten sich demnach gerade wie die Bögen, welche das Licht beschreibt, und umgekehrt wie die Cosecanten der Abstände vom Zenith, folglich wie das Product aus dem Sinus dieser Abstände in die Bögen, welche das Licht beschrieben hat.

1. Folgesatz.

§. 96. Wenn die Krümmung der Bahn sehr klein ist, so wie sie es wirklich in dem Falle ist, auf den ich gegenwärtige Aufgabe anwenden werde, so kann man dafür eine Chorde nehmen, die eben dem Bogen entspricht, und für den Winkel gAB den Winkel GAB setzen.

2. Folgesatz.

§. 97. Wenn man in dieser Absicht auf AB die Linie GK perpendiculär zieht, so ist GK = AG Sin. GAB. Und hieraus folgt denn, daß die Strahlenbrechungen in der beständigen Verhältniß der Perpendiculärlinien

GK

stehen (§. 95. n. 5.)

1. Anmerkung.

§. 98. Wenn man die Hypothese annimmt, daß die Bahn des Lichts cirkelförmig ist, so verhalten sich die Strahlenbrechungen wie die Bögen, welche beschrieben werden, durch die Sinus der Abstände vom Zenith multiplicirt. (§. 95). Da nun das Differential für die Bogen überhaupt

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

ist, so bekommt man in den Fällen, wenn das Licht in einen Cirkelbogen fortgeht

$$dz = \frac{mrdr \text{ Sin. } \gamma}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

Es ist aber überhaupt (§. 59.)

$$dz = \frac{du}{\sqrt{(rr - uu)}}$$

folglich wird

$$du = mrdr \text{ Sin. } \gamma$$

und wenn man integrirt

$$\tfrac{1}{2} mrr \text{ Sin. } \gamma = u$$

oder

$$\frac{1}{2} mrr = \frac{v}{\text{Sin. } \gamma}$$

Dieses beweißt also, daß die Verhältniß der Perpendiculärlinien CD, CT (Fig. 3.) in der beständigen Verhältniß des Quadrats des Halbmessers CM zunimmt, und aus diesem Grunde ziemlich gleichförmig in Ansehung derjenigen Schichten des Mittels, welche nicht weit von einander entfernt sind.

2. Anmerkung.

§. 99. Wenn man den zweiten Folgesatz auf die astronomische Strahlenbrechung anwendet, so läßt sie sich so ziemlich genau bestimmen. Allein die Höhe der Atmosphäre, welche man in diesen Falle herausbringt, ist eben so wenig richtig, als diejenige, welche man bekommt, wenn man annimmt, daß das Licht in der Luft nur einmal gebrochen werde. (§. 88.)

3. Anmerkung.

§. 100. Da die Gegenstände auf der Erde, bey denen man eine Strahlenbrechung gewahr wird, nicht sehr hoch sind, und die Entfernung, in der man sie noch sehen kann, aufs höchste zwey bis drey Grade der Oberfläche der Erde beträgt, so folgt daraus, daß der Theil der Bahn des Lichts für Gegenstände auf der Erde sehr klein ist, und man dahero ihn ohne merklichen Fehler als einen Cirkelbogen betrachten kann, dessen Halbmesser der Halbmesser der Krümmung

der Bahn ist. Denn der Krümmungskreiß ist unter allen möglichen derjenige, der der wahren Bahn am nächsten kommt. Um aber zu zeigen, daß diese Voraussetzung ganz sicher angehe, darf man nur erwägen, daß die Krümmung des Bogens, welchen man annimmt, allezeit der Refraction gleich ist. Diese ist aber für die entferntesten Gegenstände nicht über acht oder zehn Minuten. Folglich kann die Abweichung nicht größer seyn, als die Abweichung des Krümmungskreises von der wahren krummen Linie in einer Entfernung von acht bis zehn Minuten von dem Berührungspunct beträgt. Wäre nun diese Abweichung merklich, so müßte die Krümmung der Bahn des Lichts mit einer außerordentlichen Geschwindigkeit zu oder abnehmen. Dieses ist aber wieder alle Erfahrung, und dahero glaube ich berechtigt zu seyn, die Bahn des Lichts durch zwey nahe an einander liegende Schichten der Luft, als einen Cirkelbogen zu betrachten.

4. Anmerkung.

§. 101. Diese Hypothese, die der Wahrheit ziemlich nahe kommt, nehme ich demnach ein für allemal an, und werde sie nunmehro auf die verschiedenen Fälle anwenden, die von den irdischen Strahlenbrechungen abhängen. Dabey kommt es nun für allen Dingen darauf an, daß man die gerade Linie AC bestimme (Fig. 5.) welche ich den horizontalen Halbmesser nenne; denn wenn dieser einmal gefunden ist, so sind es

die übrigen A E, A F ebenfalls. Denn sie verhalten sich wie die Secanten der scheinbaren Höhen der Gegenstände über den Horizont. In dieser Absicht wollen wir denselben erstlich durch Beobachtungen bestimmen, welche man bei Gegenständen auf der Oberfläche der Erde machen kann, und nachgehends auch die astronomische Strahlenbrechungen dazu anwenden.

7. Aufgabe.

§. 102. A, B sind zwei Oerter, (Fig. 6.) von denen man weiß, wie viel der eine höher liegt als der andere. Die Winkel G A H, F B C, welche die Tangenten der Bahn des Lichts an ihren äußersten Puncten mit den geraden Linien C A, C B einschließen, die von C dem Mittelpunct der Erde ausgezogen worden, sind ebenfalls bekannt. Man soll den horizontalen Halbmesser, die Strahlenbrechung an beiden Orten, und ihre Entfernung bestimmen.

Auflösung.

Weil man die Bahn des Lichts als einen Cirkelbogen annehmen kann (§. 100.), so kommt diese Aufgabe lediglich auf die Auflösung folgender an, welche blos geometrisch ist.

Wenn die Lage zweier Cirkel A D, H B die einerlei Mittelpunct haben, gegeben wird,

einen dritten zu finden, der beide unter gegebene Winkel durchschneidet.

Es sey A B dieser Cirkel, und R der Mittelpunkt desselben. Man ziehe die Halbmesser A R, B R, und auf dieselben von dem Mittelpunct C die Linien C P, C Q perpendiculär. Man setze ferner

Den Winkel G A H $= \gamma$
F B C $= \omega$
Den Halbmesser A C $= 1$
C R $= r$
A R $= x =$ B R

So bekommt man

$CP = \text{Cos.}\, \gamma \qquad CQ = r\,\text{Cos.}\, \omega$
$RP = \text{Sin.}\, \gamma \qquad BQ = r\,\text{Sin.}\, \omega$
$PR = x - \text{Sin.}\, \gamma \qquad QR = x - r\,\text{Sin.}\, \omega$

Man vereinige die Mittelpuncte C und R durch die gerade Linie C R, so ist diese die Hypothenuse der beiden rechtwinklichten Triangel C P R, C Q R, und es ist

$$CP^2 + PR^2 = CQ^2 + QR^2$$

Setzt man in dieser Gleichung die gefundene Werthe, so wird

$$\text{Cos.}\, \gamma^2 + (x - \text{Sin.}\, \gamma)^2 = r^2\, \text{Cos.}\, \omega^2 + (x - r\,\text{Sin.}\, \omega)^2$$

welche

$$x = \frac{(r+1)(r-1)}{2\,(r\,\text{Sin.}\, \omega - \text{Sin.}\, \gamma)}$$

giebt.

Diese Gleichung bestimmt den Halbmesser A R. Man verlängere die Verticallinie A C, und lasse darauf die Perpendiculärlinie R E fallen, so ist A E der horizontale Halbmesser (§. 38, 39.), den ich $=$ R setze, und denn ist

$$R = x \,\text{Sin.}\, \gamma = \frac{(rr - 1)\,\text{Sin.}\,\gamma}{2\,(r\,\text{Sin.}\,\omega - \text{Sin.}\,\gamma)}$$

Weiter findet man hieraus

$$CE = R - 1$$
$$ER = x\,\text{Cos.}\,\gamma$$
$$CR = \sqrt{(1 - 2x\,\text{Sin.}\,\gamma + xx)}$$
$$\text{Cotg}\,ECR = \frac{EC}{ER}$$
$$\text{Sin.}\,CBR = \frac{x\,\text{Cos.}\,\omega}{\sqrt{(1 - 2x\,\text{Sin.}\,\gamma + xx)}}$$

und daraus endlich den Winkel A C B, welcher die horizontale Entfernung der beiden Oerter giebt. Dadurch findet man denn weiter den Winkel A g F, welcher doppelt so gros ist als jede irdische Strahlenbrechung.

1. Beispiel.

§. 103. Der Herr Caßini beobachtete am Fuß des Kirchturms zu Massanne die scheinbare Erniedrigung der Meeresfläche, und fand sie 50′. 20″ und die Höhe des Turms über den Horizont des Meeres von $408\frac{1}{2}$ Toisen. Es war also

$\gamma = 90°$ $\qquad$ $AC = 1$

$\omega = 89°\,9'\,40''$ $\qquad$ $CB = 1{,}000125 = r$

Setzt man diese Werthe in der Formel

$$x = \frac{rr - 1}{2(r \text{ Sin. } \omega - \text{Sin. } \gamma)}$$

so findet man

$$x = 7,06 = R$$

so, daß der horizontale Halbmesser siebenmal größer war als der Halbmesser der Erde.

2. Beispiel.

§. 104 Bei einer andern Beobachtung, welche einige von den Herrn Mitgliedern der Pariser Academie anstellten, war A der Turm zu Aigues-mortes, B die Spitze des Berges les Houpies und der Winkel.

$$\gamma = 89^\circ 15' 19''$$
$$\omega = 89^\circ 19' 40''$$
$$ACB = 0.35' 36''$$

folglich $FgA = 0.4' 57'' = z$

In diesem Beispiel sind alle Winkel gegeben, und weil der Strahl AB ziemlich horizontal fortgegangen, so ist

$$x = R = \frac{ACB}{FGA} = 7,02$$

Dieser Werth von R ist also wenig von demjenigen unterschieden, den wir im ersten Beispiel gefunden, welches denn beweist, daß der Zustand der Luft in beiden Fällen ziemlich gleich gewesen.

Anmerkung.

§. 105. Man sieht leicht, daß man den horizontalen Halbmesser noch auf verschiedene Arten finden kann, nachdem die Stücke, durch welche sich die Lage und der Durchmesser eines Cirkelbogens bestimmen läßt, mit einander verbunden werden können. Weil sich aber nicht allezeit die Gelegenheit darbietet, die dazu erforderliche Beobachtungen anzustellen, so thut man vielleicht besser, wenn man sich der astronomischen Strahlenbrechung bedienet, zumal da man sie mit mehrerer Bequemlichkeit beobachten kann, als die, welche bei Gegenständen auf der Oberfläche der Erde vorkommen.

VIII. Aufgabe.

§. 106. **Den horizontalen Halbmesser durch die astronomische Strahlenbrechung zu bestimmen.**

Auflösung.

Es sey A H ein Lichtstrahl, (Fig. 7.) der bis h geht. A G ein andrer, so dem ersten unendlich nahe ist, und ebenfalls bis g fortgeht. Der Winkel h A C $= \gamma$, g A C $= \gamma - d\gamma$, die astronomische Strahlenbrechung für den Strahl A H $= z$, ebendieselbe für den Strahl A G $= z - dz$. Man ziehe von dem Mittelpunct C der Erde die gerade Linie C g dergestalt, daß der Winkel g C A $= d\gamma +$ g E A sey; so wird diese Linie mit dem Lichtstrahl A g einen eben so

großen Winkel einschließen, als die Verticallinie A C mit dem Halbmesser A H macht, und ein Beobachter in g sieht ein Gestirn nach der Richtung des Strahls g A G eben so weit von seinem Zeinth entfernt, als ein Beobachter in A ein ander Gestirn nach der Richtung des Strahls A H von seinem Zeinth entfernt sieht. Es sey der Halbmesser der Krümmung A E = g E, so ist die Strahlenbrechung für den kleinen Theil A g der Bahn des Lichts = A g : A E. Folglich ist die astronomische Strahlenbrechung eines Gestirns das in g gesehen wird, = z — d z + A g : A E. Da aber die scheinbare Höhe der beiden Gestirne an beiden Orten einerlei ist, und die beide Lichtstrahlen g G, h H von einander unendlich wenig entfernt sind, so ist klahr, daß sich die respective Strahlenbrechungen an beiden Orten gegen einander verhalten müssen, wie die Strahlenbrechende Kräfte in A und g. Setzen wir nun die Strahlenbrechende Kraft des Mittels in A = 1, in g = 1 + du;

so ist

$$z - dz + \frac{Ag}{AE} : z = 1 + du : 1$$

folglich

$$zdu + dz = \frac{Ag}{AE}$$

Es ist aber

$$AE = AD\,\mathrm{Cosec}\,\gamma$$

und $AK = d\gamma + \frac{gA}{AE}$

folglich

$$Ag = d\gamma\,\text{Cosec}\,\gamma + \frac{gA}{AE}.\,\text{Cosec}\,\gamma$$

oder

$$Ag = \frac{dg\,\text{Cosec}\,\gamma}{AD - 1}.\,AD$$

folglich wenn man substituirt

$$zdu + dz = \frac{d\gamma}{AD - 1}$$

Da aber der Unterschied Kg unendlich klein ist, so ist du mit Kg proportional, wenn man also

$$du = m.\,Kg$$

setzt, so bekommt man, da auch

$$Kg = \frac{d\gamma.\,\text{Cotg}\,\gamma}{AD - 1}.\,AD$$

ist, endlich

$$\frac{R}{R - 1}\,d\gamma.\,mz\,\text{Cotg}\,\gamma + dz = \frac{d\gamma}{R}$$

und hieraus

$$R = \frac{d\gamma + dz}{mz\,d\gamma.\,\text{Cotg}\,\gamma + dz}$$

Nimmt man aber die horizontale Strahlenbrechungen, welche zu dieser Absicht am geschicktesten sind, so ist $\gamma = 90°$ und $\text{Cotg}\,\gamma = 0$ folglich

$$R = 1 + \frac{d\gamma}{dz}$$

Man

Man beschreibe eine krumme Linie B M, (Fig. 8.) dergestalt, daß die Abscissen AB die scheinbaren Höhen der Gestirne, und die Applicaten P M die denselben entsprechende Strahlenbrechungen ausdrücken. durch den Punct B zieht man eine Linie, welche die also beschriebene krumme Linie berührt, so wird sich der horizontale Halbmesser, zum Halbmesser der Erde, wie AT + AB zu AB verhalten. Man sieht übrigens, daß wenn nur einige horizontale Strahlenbrechungen gegeben werden, man leicht den Anfang der krummen Linie BM beschreiben kann, und dieser ist schon hinreichend, um die Lage der Tangente B T zu bestimmen. Inzwischen müssen die Beobachtungen, die man zum Grunde legen will, sehr zuverläßig seyn.

Auf eine andre Art.

§. 107. Es sey DB ein Cirkel, dessen Mittelpunct C ist. Auf die Verticallinie BC nehme man einen Punct A dergestalt, daß, wenn man den Winkel MAB = γ macht, und MQ auf CB perpendiculär zieht, die Linie MQ der Strahlenbrechung proportional sey, welche dem Winkel γ entspricht, welches sich allezeit mit einer ziemlichen Genauigkeit bewerkstelligen läßt, besonders da man nur diesen Fall auf die Strahlenbrechungen einrichten darf, welche den Horizontalen am nächsten kommen. Man richte in A die Perpendiculärlinie AD auf, welche der horizontalen Strahlenbrechung proportional,

folglich $= nz$ ist. Man ziehe mit AD die Linie PR parallel und unendlich nahe, vereinige die Puncte A und P durch die gerade Linie AP, desgleichen die Puncte C, P, D durch die gerade Linien PC, DC. Endlich ziehe man Pp auf AD perpendiculär, und mache den Winkel $PAD = d\gamma$, so ist

$$PR = n(z - dz)$$

$$pD = ndz$$

$$CA : AD = pD : Pp$$

folglich $Pp = \frac{n^2 z\, dz}{CA}$.

Allein es ist

$$Pp = AP . d\gamma = nzd\gamma$$

folglich $nzd\gamma = \frac{n^2 zdz}{CA}$

Demnach

$$d\gamma : dz = n : AC$$

Die erste Auflösung giebt aber

$$R = 1 + \frac{d\gamma}{dz}$$

folglich wird

$$R = 1 + \frac{n}{AC}$$

Da nun n und AC gegeben werden, so wird R völlig bestimmt.

Anmerkung.

Nach der ersten Auflösung ist blos eine parabolische Linie zu beschreiben, oder viel-

mehr die Gleichung für dieselbe zu finden. Dieses geschiehet, nun wie bekannt, daß man

$$y = A + B.\frac{x-m}{m} + C.\frac{x-m}{m}.\frac{x-n}{n}$$

$$+ D.\frac{x-m}{m}.\frac{x-n}{n}.\frac{x-p}{p} + \text{etc.}$$

setzt, und y die den scheinbaren Höhen x entsprechende Strahlenbrechungen bedeuten läst. Wenn alsdenn für

$$x = m,\ n,\ p,\ q \text{ etc.}$$
$$y = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ etc.}$$

und ausserdem $n = 2m$, $p = 3m$, $q = 4m$ etc. ist, so wird

$$A = \alpha$$
$$B = \beta - \alpha$$
$$C = \gamma - 2\beta + \alpha$$
$$D = \delta - 3\gamma + 3\beta - \alpha$$
$$E = \varepsilon - 4\delta + 6\gamma - 4\beta + \alpha$$

etc. etc.

Hat man endlich diese Coefficienten bestimmt, und sucht den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für den Anfangspunct der Abscissen, oder da wo $x = 0$ ist, so wird $\frac{dy}{dx}$ durch eine Reihe von dieser Form ausgedrückt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}\left(B - \frac{aC}{1.2.} + \frac{bD}{1.2.3.} - \frac{cE}{1.2.3.4.} + \frac{eF}{1.2.3.4.5.} - \text{ꝛc.}\right)$$

und darinnen ist.

$a = 3$

$b = 3a + .1.2.$

$c = 4b + 1.2.3.$

$d = 5c + 1.2.3.4.$

$e = 6d + 1.2.3.4.5.$

$f = 7e + 1.2.3.4.5.6.$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

so, daß der Fortgang leicht zu sehen ist.

Um diese Formel durch ein Beispiel zu erläutern, ist nach der von la Lande gegebenen Tafel für die Strahlenbrechung für

$x = 0$	$y = 32'\ 24''$
$x = 3'.\ m$	$y = 31'\ 56 = \alpha$
$x = 6'.\ n$	$y = 31'\ 28'',6 = \beta$
$x = 9.\ p$	$y = 31'\ 6'' = \gamma$
$x = 12.\ q$	$y = 30'\ 34,9'' = \delta$
$x = 15.\ r$	$y = 30'.\ 8,5 = \varepsilon$
$x = 18.\ s$	$y = 29.42,5 = \zeta$

$A = 31'56''$

$B = -28''$

$C = +0,4''$

$D = -0,1''$

Hieraus wird also

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{180}.\ 28,6$$

folglich

$$R = \frac{dx}{dy} + 1 = \frac{180}{28,6} + 1$$

oder

$$R = 6,29 + 1 = 7,29$$

2. Anmerkung.

Anstatt den Punct A zu bestimmen, kann man unter eben die Voraussetzung §. 107. den Halbmesser CB suchen, so daß, wenn man alsdenn damit den Cirkel BMD beschreibt, den Winkel MAB $= \gamma$ macht, und MQ, DA auf CB perpendicular zieht, die Linie MQ sich zu AD, wie die Strahlenbrechung für dem Winkel BAG $= \gamma$ sich zu den horizontalen verhält.

Setzt man dahero die Strahlenbrechung für den Winkel QAM $= \gamma = z'$ und die horizontale Strahlenbrechung $= z$, so wird

$$RM : AD = z' : z$$

Es sey nunmehro CA der Halbmesser der Erde $= a = 1$

$$CB = x$$
$$AQ = y$$

so ist QM $= y$ Tang γ

Und $y^2 \text{ Tang } \gamma^2 = x^2 - (a + y)^2$

$$AD^2 = x^2 - a^2$$

Es ist aber auch

$$AD^2 = \frac{z^2 y^2 \text{ Tang } \gamma^2}{z'^{.2}}$$

Folglich wird

$$x^2 z'^2 = z'^2 a^2 + z^2 y^2 \text{Tang}\,\gamma^2$$

Hierdurch bekommt man also die Gleichung

$$z'^2 y^2 \text{Tang}\,\gamma^2 = z'^2 a^2 + z^2 y^2 \text{Tang}\,\gamma^2 - z'^2 (a+y)^2$$

oder

$$z'^2 y^2 \text{Tang}\,\gamma^2 = z^2 y^2 \text{Tang}\,\gamma^2 - 2a z'^2 y - z'^2 y^2$$

folglich $y(z'^2 \text{Sec}\,\gamma^2 - z^2 \text{Tang}\,\gamma^2) = -2a z'^2$

folglich

$$y = \frac{2a z'^2}{(z \text{Tang}\,\gamma - z' \text{Sec}\,\gamma)(z \text{Tang}\,\gamma + z' \text{Sec}\,\gamma)}$$

Hieraus wid denn

$$AD = \frac{2a z' z . \text{Tang}\,\gamma}{(z \text{Tang}\,\gamma - z' \text{Sec}\,\gamma)(z \text{Tang}\,\gamma + z' \text{Sec}\,\gamma)}$$

Man setze

$$z' : z = 1 : m$$

so wird $z' = \frac{1}{m} . z$

folglich

$$AD = \frac{2a . z^2 \text{Tang}\,\gamma}{m(z \text{Tang}\,\gamma - \frac{1}{m} z \sec\gamma)(z \tan\gamma + \frac{1}{m} . z \sec\gamma)}$$

oder

$$AD = \frac{2 m a . \text{Tang}\,\gamma}{(m \text{Tang}\,\gamma - \text{Sec}\,\gamma)(m \text{Tang}\,\gamma + \text{Sec}\,\gamma)}$$

oder

$$AD = \frac{m a . \text{Sin}\,2\gamma}{(m \text{Sin}\,\gamma - 1)(m \text{Sin}\,\gamma + 1)}$$

Da nun AD = nz gesetzt worden, so wird

$$1 : z = n : AD$$

und dahero ist

$$\frac{n}{a} = \frac{n}{AC} = \frac{m.\,\mathrm{Sin}\,2\gamma}{(m\,\mathrm{Sin}\,\gamma - 1)(m\,\mathrm{Sin}\,\gamma + 1)} \times \frac{57^\circ\, 17'\, 44'',8}{z}$$

wodurch denn der horizontale Halbmesser leicht gefunden werden kenn.

Wenn wir nach den vorigen Beispiel

$$\gamma = 89^\circ\, 42'$$

setzen, so bekommen wir

$$z' = 29'\, 42'',5 = 1782''$$

$$z = 32'\, 24'' = 1944''$$

Demnach $m = \frac{1944}{1782} = \frac{12}{11}$

folglich wird

$$\frac{n}{AC} = 6,37$$

und hieraus den horizontalen Halbmesser der Krümmung

$$R = 7,37$$

welcher von dem vorhin gefundenen nicht viel unterschieden ist.

24. Lehrsatz.

§. 108. Die Strahlenbrechung nahe an der Erde, verhält sich zu dem Winkel den der Gegenstand mit dem Ort, wo die Beobachtung gemacht wird, am Mittelpunct der Erde

einschließt, wie der Halbmesser der Erde zu dem horizontalen Halbmesser zweimal genommen.

Beweis.

Es sey A der Ort, wo die Beobachtung geschieht, B der Gegenstand, A B die Bahn des Lichts oder ein Cirkelbogen, den man dafür annimmt. AR = BR der Halbmesser desselben. AE der horizontale Halbmesser der Krümmung. Zieht man die Tangenten AG, BF, so daß sie sich in g durchschneiden, so ist der Winkel FgA = ARB doppelt so gros als die Erdstrahlenbrechung in A oder B. Folglich ist diese Strahlenbrechung $= \frac{1}{2}$ ARB $= \frac{1}{2} \frac{AB}{AR}$. Setzt man nun den Winkel GAH oder den scheinbaren Abstand des Gegenstandes vom Zenith $= \gamma$, so bekommt man A R = AE Cosec γ = R Cosec γ und die Strahlenbrechung $\varrho = \frac{\frac{1}{2} AB}{R \text{ Cosec } \gamma}$

Da aber die Entfernung AB sehr klein ist, so ist beinahe AB = AD Cosec γ. Substituirt man diesen Werth, so bekommt man $\varrho = \frac{\frac{1}{2} AD}{R}$ folglich ist

$$\varrho : ACD = 1 : 2R.$$

Folgesatz.

§. 109. Weil der horizontale Halbmesser der Krümmung = 7 ist, so ist die Erdstrah-

lenbrechung, der vierzehnte Theil der horizontalen Entfernung des Gegenstandes.

29. Lehrsatz.

§. 110. Wenn verschiedene Gegenstände in einer und ebenderselben Verticallinie liegen, und sie werden in dem Punct A gesehen, so scheinen sie wegen der Strahlenbrechung mehr erhaben zu seyn, der Winkel aber um den sie höher zu seyn scheinen, ist bei allen gleich gros.

Beweis.

Denn der Winkel, welcher das Maas der Strahlenbrechung ist, hängt lediglich von dem Winkel ACD ab, und ist demselben proportional (§. 108.). Dieser Winkel bleibt aber für alle Gegenstände, die in der Verticallinie DE liegen, unveränderlich. Folglich ꝛc.

30. Lehrsatz.

§. 111. Die scheinbare Größe der Gegenstände, welche in einer Verticallinie BD liegen, und in dem Ort A durchgebrochne Lichtstrahlen gesehen werden, ist eben so, als sie ohne der Strahlenbrechung seyn würde.

Beweis.

Die scheinbare Größe ist der Unterschied der scheinbaren Höhen. Weil nun die Strahlenbrechung jede Höhe um einerlei Winkel größer

macht, so ist klar, daß ihr Unterschied so groß ist als vorhin. Folglich

31. Lehrsatz.

§. 112. Die Erdstrahlenbrechung nimmt in Verhältnis der Horizontalweiten zu.

Beweis.

Dieser Satz ist blos eine Anwendung des 28sten Lehrsatzes.

1. Anmerkung.

§. 113. Man muß hier wohl merken, daß wenn hier gesagt wird, ein Gegenstand liegt höher, solches nur von dem Winkel zu verstehen ist, um den er höher erscheint, welcher gerade die Strahlenbrechung ist, und nicht von der wirklichen Höhe GB. Denn diese Höhe GB wächst in Verhältnis des Products aus dem Quadrat der Horizontalweite in die Secante der scheinbaren Höhe über dem Horizont.

2. Anmerkung.

§. 114. Da sich die Erdstrahlenbrechung nur ohngefehr bis auf den vierzehnten Theil der Krümmung der Erde oder des Winkels ACB erstreckt, so ist offenbahr, daß man diese Krümmung mit in Rechnung bringen muß, so bald man die Erdstrahlenbrechung, besonders die horizontale bestimmen will.

9. Aufgabe.

§. 115. Es wird die Höhe eines Gegenstandes über die Erde oder die Meeresfläche gegeben, man soll die größte Entfernung finden, in der er gesehen werden kann.

Auflösung.

Es sey AC der Halbmesser, und MA die Oberfläche der Erde, (Fig. 10.) Mo die Höhe des Gegenstandes, AE der horizontale Halbmesser der Krümmung, der in diesem Falle dann zugleich der Halbmesser der Bahn des Lichts ist, welche die Oberfläche der Erde in A berühret. Wenn man nun $AC = 1$ $oE = R$, $oM = y$ setzt, und den Umstand in Erwegung zieht, daß die Winkel ACM, AEo sehr klein sind, so kann man folgende Proportion, nachdem man die Tangente AO gezogen, und CM bis in O verlängert, ohne merklichen Fehler annehmen

$$Oo : OM = AC : AE$$

aus der man wieder diese

$$y : OM = R - 1 : R$$

$$\text{und } OM = \frac{R}{R-1} \cdot y$$

$$\text{folglich } CO = 1 + \frac{Ry}{R-1} = \text{Sec } ACO$$

bekommt.

Dadurch wird also der Winkel ACO bekannt, und der Bogen AM wird $= \sqrt{\frac{2Ry}{R-1}}$ in sol-

chen Theilen ausgedrückt, zu denen der Halbmesser der Erde die Einheit ist.

Folgesatz.

§. 116. Ohne die Strahlenbrechung würde man einen Gegenstand in der Entfernung = $\sqrt{2y}$ sehen. Diese Entfernung verhält sich demnach zu der gefundenen $\sqrt{\frac{2Ry}{R-1}}$ wie

$\sqrt{(R-1)}$ zu $\sqrt{R}$ oder wie $\sqrt{(1-\frac{1}{R})}$

zu 1; welche beinahe die Verhältniß $2R-1 : 2R$ giebt. Wird dahero der horizontale Halbmesser = 7 angenommen, so ist diese Verhältnis = 13 : 14. Die Strahlenbrechung macht also, daß man einen Gegenstand um den dreizehnten Theil weiter sehen kann, als es sonst geschehen würde.

32. Lehrsatz.

§. 117. Wenn der Zustand der Luft unverändert bleibt, so nimmt die Entfernung, in der man noch einen Gegenstand sehen kann, in der Verhältnis der Quadrat Wurzel aus der Höhe desselben über die Oberfläche der Erde oder des Meeres zu.

Beweis.

Denn da diese Entfernung = $\sqrt{\frac{2Ry}{R-1}}$ ist (§. 115), so hängt sie lediglich von dem hori-

zontalen Halbmesser der Krümmung und der Höhe des Gegenstandes ab. Nach dem aber, was in dem Lehrsatz angenommen wird, bleibt R unveränderlich, und dahero steht diese Entfernung in der Verhältnis $\sqrt{y}$, folglich in der Verhältnis der Quadratwurzel aus der Höhe des Objects über dem Horizont.

10. Aufgabe.

§. 118. Es werden die Höhe eines Gegenstandes über den Horizont, und der horizontale Halbmesser der Krümmung gegeben; man soll die Strahlenbrechung, die Erniedrigung des wahren Horizonts unter dem scheinbaren, und die scheinbare Entferrung bestimmen, auf die er sich erstreckt.

Auflösung.

Es sey AM der wahre Horizont, o ein Ort der über denselben erhaben ist, oM die wahre Höhe desselben, oA ein Lichtstrahl, welcher den Horizont in A berührt, so ist A die scheinbare Grenze, und AM die horizontal Weite. Es sey AE der horizontale Halbmesser, und nachdem man die Puncte E, o, zusammengezogen, setze man wie vorhin CA = 1, AE = R, Mo = y, so ist (§. 115.)

$$AM = \sqrt{\frac{2Ry}{R-1}} = ACM$$

Es ist aber die Erdstrahlenbrechung e der

$\frac{1}{2R}$ te Theil des Winkels ACM (§. 108.) folglich ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{y}{2R(R-1)}}$$

Ferner ist die Erniedrigung des wahren Horizonts unter den scheinbaren, dem Winkel CoE gleich. Da nun die Winkel CEo CoE sehr klein sind, so ist

$$CoE : oCA = CE : Eo = R-1 : R$$

woraus man

$$CoE = \frac{oCA.(R-1)}{R}$$

bekomt. Folglich ist die scheinbare Erniedrigung des Horizonts der See der $\frac{R-1}{R}$ te Theil der Entfernung MCA, auf die sich die äusserste Grenzen desselben zu erstrecken scheinen. Da nun diese Entfernung $= \sqrt{\frac{2Ry}{R-1}}$ ist, so ist die

$$\text{Erniedrig. des Horiz.} = \sqrt{\frac{2y(R-1)}{R}}$$

Folgesatz.

§. 119. Wenn demnach der Zustand der Luft unverändert bleibt, so ist die Entfernung der Gränzen des Horizonts, die Erniedrigung desselben, und die Strahlenbrechung für demselben, in der Verhältniß der Quadratwurzel aus der Höhe des Gegenstandes über den Horizont. So daß

wenn R = 7 gesetzt wird, diese drey Größen sich wie die Zahlen 14, 12, 1 oder überhaupt wie 2 R, (2 R — 2), 1 verhalten.

Anmerkung.

§. 120. Der Herr J. Caßini beobachtete die scheinbare Erniedrigung des Horizonts des Meeres von verschiedenen Höhen, welche er geometrisch gemessen hatte. Diese Beobachtungen finden sich in seinem Traité sur la Grandeur & la Figure de la Terre. Man wird in der Folge sehen, daß bey den mehresten von diesen Höhen eine starke Verbesserung vorgenommen werden muß, weil sie ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechnet sind. Ich werde hier also diese verbesserte Höhen, und die beobachtete Erniedrigungen hersetzen.

	y		CoE		
Zu Collioure	69 Fuß	0°	: 8′	. 35″
. Perpignan	216	0	15	0
. St. Elme	609	0	26	20
. Tautavel	1486	0	38	0
. Massanne	2459	0	50	20

Nimmt man die Quadratwurzeln aus den Höhen y, so stellen sie so ziemlich genau die ihnen entsprechende Tiefe in Minuten ausgedrückt vor, und man darf sie ohngefähr um den sechzehnten Theil vermehren, welches ich durch die Formel der 9ten Aufgabe gefunden habe. So bekommt man

$\sqrt{69}$ = 8′ : 18″ statt 8′ . 35

$\sqrt{216}$ = 14 ; 43 — 15 . 0

$\sqrt{609} = 24 : 36 - 26 . 20$
$\sqrt{1486} = 38 : 33 - 38 . 0$
$\sqrt{2450} = 40 : 30 - 50 . 20$

Alle diese Beobachtungen wurden in den Monathen Januar, Februar und Merz, folglich zu einer Jahreszeit gemacht, bey der die Luft großen Veränderungen unterworfen ist. Nimmt man inzwischen den Zustand der Luft bey allen Beobachtungen gleich an, so weicht die Rechnung von den Beobachtungen aufs höchste um eine Minute ab. Wir sehen also daraus, daß es allezeit höchst nothwendig sey, da, wo der Fehler von einer Minute allerdings nicht weggelassen werden kann, den horizontalen Halbmesser der Krümmung genau und unmittelbar durch die Beobachtung selbst zu bestimmen, so wie es in der 7 und 8ten Aufgabe gezeigt worden. Dieses kommt allezeit denn vor, wenn man aus der Höhe eines gewissen Orts eine von den dreyen Größen finden will, welche in der 10ten Aufgabe bestimmt werden. Sucht man aber die Höhe eines Berges durch seine scheinbare Höhe und seine Entfernung, so kann man es dobei bewenden lassen, daß man den horizontalen Halbmesser der Krümmung = 7 setzt, besonders alsdenn, wenn die gegebene Entfernung nicht sehr groß, z. B. kleiner als zwey Grade der Erde ist.

33. Lehrsatz.

§. 121. Beym Nivelliren verhält sich die Erniedrigung Oo eines Gegenstandes, den man in A

in der scheinbaren Horizontal-Lienie AO sieht, zu der Höhe oM dieses Gegenstandes über die Oberfläche der Erde, oder den wahren Horizont AM, wie der Halbmesser der Erde zu den Unterschied zwischen den horizontalen Halbmesser der Krümmung und den Halbmesser der Erde.

Beweis.

Nach der neunten Aufgabe (§. 115) haben wir

$$OM = \frac{R}{R-1}\,y$$

oder $oM = y$

Folglich $oO = \frac{Ry}{R-1} - y = \frac{y}{R-1}$

Und dahero

$$oO : oM = \frac{y}{R-1} : y$$

oder

$$oO : oM = 1 : R-1$$

1. Folgesatz.

§. 122. Wird demnach der horizontale Halbmesser der Krümmung $= 7$ angenommen, so findet man oM sechsmal größer als oO. Folglich verursacht die Strahlenbrechung, daß die Gegenstände, welche in der scheinbaren Horizontal-Lienie AO gesehen werden, um den sechsten oder überhaupt um den $\frac{1}{R-1}$ ten Theil ihrer Hö-

he über den wahren Horizont, höher zu seyn scheinen.

2. Folgesatz.

§. 123. In den Tafeln, welche zum Gebrauch bei dem Nivelliren berechnet werden, wird gemeiniglich die ganze Höhe OM angegeben. Aus dem vorhergehenden folgt also, daß man sie um den 7ten Theil kleiner nehmen müße, wenn der horizontale Halbmesser 7 ist, und man die wahre Höhe Mo haben will. Denn der Gegenstand, den man nach der Richtung der scheinbaren Horizontallienie in O zu sehen glaubt, liegt wirklich um den siebenten oder überhaupt um den $\frac{1}{k}$ten Theil seiner wahren Höhe niedriger in o.

Anmerkung.

§. 124. Nach dieser Voraussetzung, daß der horizontale Halbmesser der Krümmung = 7 ist, habe ich folgende Tafel berechnet, in der die erste Columne die Höhe oO angiebt, um die der Gegenstand höher zu seyn scheint, und die zweite die Entfernung AO oder AM, welche dazu gehört Ich habe dabey ein Mittel zwischen dem Durchmesser des Equators und die Axe der Erde genommen, und für die Weite AM von 10000 Toisen die ganze Höhe OM = 15, 311 Toisen angenommen. Dieses giebt also oO = $\frac{15,311}{7}$ = 2, 1873 und hieraus findet man

denn die übrigen Zahlen in der Tafel, weil oO in Verhältniß des Quadrats der Entfernung AM zu oder abnimmt. (§. 118.). Der Gebrauch dieser Tafel kommt bei allen dem vor, was ich schon bei der 10ten Figur theils gezeigt habe, theils noch zeigen werde. Wenn man nemlich oO für eine beliebige Weite AM gefunden, so bekommt man oM, indem man oO durch 6 multiplicirt. Multiplicirt man aber oO durch 7, so erhält man die ganze Höhe OM, welche von der Strahlenbrechung unabhängig ist. Aus diesen kann man nachgehends oO oder oM für jeden andern horizontalen Halbmesser der Krümmung finden, der größer oder kleiner ist als der, so bey der Berechnung dieser Tafel zum Grunde gelegt worden.

Es wird auch nicht schwer seyn, die Höhen oO für größere Weiten zu finden, als in der Tafel vorkommen, wenn man sich nur erinnert, daß bei einer doppelten Weite, die Höhe oO vier mal größer, oder überhaupt oO dem Quadrat der Weite AM proportional ist.

Tafel zur 10ten Figur,

um wie viel Französische Toisen, man die Höhe der Oerter, welche in der Horizontal-Lienie gesehen werden, vermindern muß.

oO	AM	oO	AM	oO	AM
1	6761	34	39427	67	55344
2	9562	35	40002	68	55758
3	11711	36	40570	69	56166
4	13523	37	41130	70	56571
5	15119	38	41680	71	56974
6	16562	39	42226	72	57374
7	17889	40	42764	73	57770
8	19124	41	43296	74	58165
9	20285	42	43820	75	58556
10	21388	43	44338	76	58940
11	22425	44	44351	77	59333
12	23422	45	45357	78	59719
13	24379	46	45860	79	60098
14	25300	47	46354	80	60477
15	26187	48	46845	81	60855
16	27046	49	47331	82	61230
17	27879	50	47812	83	61600
18	28687	51	48287	84	61970
19	29470	52	48758	85	62338
20	30238	53	49234	86	62705
21	30985	54	49687	87	63069
22	31715	55	50144	88	63430
23	32427	56	50599	89	63788
24	33125	57	51049	90	64146
25	33808	58	51495	91	64501
26	34478	59	51937	92	64854
27	35134	60	52375	93	65206
28	35778	61	52810	94	65556
29	36412	62	53240	95	65903
30	37035	63	53668	96	66250
31	37647	64	54092	97	66595
32	38249	65	54514	98	66937
33	38842	66	54931	99	67277
34	39427	67	55344	100	67615

1. Anmerkung.

§. 125. Weil die Gegenstände auf der Erde, die so weit entfernt sind, daß die Strahlenbrechung dabey merklich wird, gemeiniglich sehr wenig über den Horizont erhoben zu seyn scheinen, so daß ihre scheinbare Höhe nur einige Grade beträgt; so kann man annehmen, daß die Strahlenbrechung sie um eben so viel Toisen höher bringt, als sie den Gegenstand o erheben würde, wenn er sich in eben der Weite befände.

Wenn man demnach ihre Höhe berechnet, und nicht vorher von ihrem scheinbaren Erhöhungswinkel die Strahlenbrechung abzieht, so muß man die berechnete Höhe um eben so viel Toisen vermindern, als die vorige Tafel für die Weite angiebt, in der sie beobachtet worden. Ich habe bereits oben (§. 120.) angemerkt, daß alle die so wohl in Frankreich als in andern Weltgegenden gemessene Höhen der Berge dieser Verbesserung nöthig haben, und in der Folge werde ich Beispiele davon geben.

2. Aufgabe.

§. 126. Man beobachtet die Zeit, wenn die Strahlen der untergehenden Sonne eine gerade über den Ort der Beobachtung befindliche Wolke nicht mehr erleuchten; man soll hieraus die Höhe dieser Wolke bestimmen.

Auflösung.

Man suche für die gegebene Zeit die Tiefe der Sonne unter dem Horizont, und ziehe davon die astronomische horizontale Strahlenbrechung ab, so bekommt man den Winkel ACM und also auch den Bogen AM. Verwandelt man diesen in Toisen, so bekommt man durch die vorige Tafel die Höhe oO und daraus schließt man denn weiter die Höhe oM der Wolke über den Horizont AM.

Anmerkung.

§. 127. Diese Aufgabe läßt sich nur auf den Fall mit einiger Zuverläßigkeit anwenden, wenn die Strahlen der untergehenden Sonne die Meeresfläche oder sonst eine horizontale Fläche berühren, die wenig höher liegt als die Fläche des Meeres selbst. Denn wenn ein Ort, der etwas höher liegt, seinen Schatten auf die Wolke wirft, so findet man aufs höchste nur die Höhe der Wolke über diesen Ort, und diese ist denn nicht einmal zuverläßig, weil die astronomische Strahlenbrechung von der horizontalen verschieden ist.

Diese Aufgabe ist daher von keinen sonderlichen Gebrauch. Ich will mich also nicht dabei aufhalten, um zu zeigen, wie sie in den Fällen aufgelöst werden muß, wenn die Wolke nicht vertical über den Ort stehet, besonders da man andre Methoden hat, die Höhen der Wolken zu bestimmen.

12. Aufgabe.

§. 128. Wenn eine Tafel von der astronomischen Strahlenbrechung für einen gewissen Ort gegeben wird, daraus eine andere für einen Ort zu finden, welcher höher oder niedriger liegt, wenn diese Höhe oder Vertiefung gegeben wird.

Auflösung.

Es sey Fig. 6. A einer von diesen Oertern, H ein andrer, welcher höher liegt, AB ein Lichtstrahl, den man sich bis B an die äußerste Gränze des Dunstkreises verlängert vorstellen muß. Man setze hier wie in der 7ten Aufgabe.

$$HAC = \gamma$$
$$FBC = \omega$$
$$AC = 1$$
$$AE = R$$
$$AH = y$$

Die astronomische Strahlenbrechung in

$$A = z$$
$$\text{in } B = \varphi$$

So ist von selbst klar, daß der Winkel $AgF = z - \varphi$ dem Unterschied dieser Strahlenbrechungen gleich ist.

Es ist aber dieser Winkel $A\,g\,F$ noch einmal so groß, als die Erdstrahlenbrechung in A und B, folglich ist er der $\frac{1}{R}$te Theil des Winkels ACB, welches $\varphi = z - \frac{ACB}{R}$ giebt.

Weil nun die Tafel für die astronomische Strahlenbrechung für den Ort A gegeben wird, so findet man daraus den horizontalen Halbmesser R, welcher dazu gehört durch die 8te Aufgabe (§. 106.). Es kommt also alles auf die Bestimmung des Winkels ACB an, welcher jeden Winkel γ entspricht. Dieses kann aber am besten auf folgende Art geschehen.

1) Weil die gerade Linien R und y gegeben werden, so nehme man

$$CG = 1 + \frac{Ry}{R - 1}$$

so stellt diese Linie die Secante des Winkels ACB vor, wenn $\gamma = 90°$ ist (§. 115.) Hierdurch bekommt man den Winkel ACB, und dahero auch den Winkel $GgB = FgA = \frac{ACB}{R}$

und $FBC = 90° - \frac{R - 1}{R} \times ACB = \alpha$.

Nachdem man den Winkel α gefunden, der zu dem Winkel $\gamma = 90°$ gehört, so suche man die Verhältniß der Sinus dieser beiden Winkel. Diese ist für alle Winkel γ unveränderlich, und dahero bekommt man dadurch die Winkel α welche dazu gehören.

3) Weil aber

$$CAg + AgB + gBC + BCA = 360°$$

und

$$CAG = 180^\circ - \gamma$$
$$gBC = \omega$$
$$AgB = 180^\circ - AgF$$
$$ACB = R \,.\, AgF$$

so bekommt man

$$\gamma - \omega = (R - 1) \,.\, AgF$$

folglich $AgF = \frac{\gamma - \omega}{R - 1}$

und endlich

$$\varphi = z - \frac{\gamma - \omega}{R - 1}$$

Durch jede Strahlenbrechung z, welche zu einen Winkel γ für den Ort A gehört, findet man demnach eine andre φ, welche dem Winkel ω für den Ort B entspricht.

Anmerkung.

§. 129. Nach dieser Methode habe ich für den horizontalen Halbmesser der Krümmung R = 7 gefunden, daß wenn der Ort B um 1000 Toisen höher liegt als der Punct A, man die Strahlenbrechungen für gleiche Abstände vom Zenith ohngefehr um den sechsten Theil vermindern müße.

13. Aufgabe.

§. 130. Ein Lichtstrahl fällt bei B nach der Richtung der Linie LB (Fig. 11.) parallel mit der Axe DC in die Athmosphäre, und berührt die Oberfläche der Erde in A. Man

verlangt den Punct F zu wissen, wo derselbe die Axe durchschneidet.

Auflösung.

Nachdem man vorhero die Linie LB verlängert; ziehe man auf dieselbe die Linie Ct perpendiculär, und mache den Winkel tCA = ACT der astronomischen horizontalen Strahlenbrechung gleich, die Linie CT = Ct, und ziehe TF perpendiculär auf CT, so wird dadurch der Punct F bestimmt. Aus der Natur der Sache erhellet aber, daß die gerade Linien Bt, TE die Bahn BAC in der das Licht fortgeht, in den Puncten B, E, wo sie den Grenzen der Athmosphäre begegnet, durchschneidet. Die Verhältniß der Perpendiculärlinien Ct oder CT, zu der Linie CA ist demnach einerlei mit der Verhältniß der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, wenn das Licht unmittelbar aus dem leeren Raum in die natürliche Luft übergienge. (§. 70.) Folglich ist diese Verhältniß nebst der horizontalen Strahlenbrechung gegeben. (§. 90.) Weil aber auch die Linien LB, CD parallel sind, und Ct auf LB perpendiculär ist, so ist tCF ein rechter Winkel. Hieraus folgt also, daß der Winkel CFT dem Winkel tCT gleich, und dahero doppelt so gros ist als der Winkel, welcher das Maas der horizontalen Strahlenbrechung ist. Setzt man demnach

$$CA = 1;\ CT = \upsilon;\ tCA = z$$

so bekommt man

$$CF = \upsilon \text{ Cosec. } 2z$$

Folgesatz.

§. 131. Wenn das Licht nicht nach einer Richtung einfällt, die mit der Axe perpendiculär ist, sondern mit derselben einen Winkel DCd $= \beta$ einschließt, so ist f der Punct, wo der Strahl der Axe begegnet

Es ist aber der Winkel $TCf = 2z + \beta$

folglich $Cf = v \text{ Cosec } (2z + \beta)$

Beispiel.

§. 132. Wenn die gerade Linie Cd durch die Mittelpuncte der Erde und der Sonne geht, und LB ist ein Strahl, der von dem Rande der Sonne ausgeht, so ist klar, daß Cf die Länge des Erdschattens, und der Winkel DCd der scheinbare Halbmesser der Sonne ist.

Setzt man demnach $\beta = 16'$.
$z = 33'$
$v = 1,0003054$.

so bekommt man

$$Cf = v \text{ Cosec } 82' = 41,94.$$

So daß in diesem Falle die Länge des Erdschattens ohngefehr 42 Halbmesser der Erde beträgt, welches beinahe zwei Drittel von der größten Entfernung des Monds ausmacht *) Uebrigens ist klar, daß diese Länge sich nach der geraden Verhältniß der Perpendiculärlinie CT

*) Aus dieser Verkürzung des Erdschattens erklärt man verschiedene Erscheinungen bei den Mondfinsternissen. M. s. Smiths Optic. I. B. 5. Cap.

und in umgekehrter Verhältniß der Summe der doppelten horizontalen Strahlenbrechung und des scheinbaren Halbmessers der Sonne verändert.

1. Anmerkung.

§. 133. Diese Aufgabe sowohl als der daraus gezogene Satz, hängen von keiner Hypothese ab, und das was zu der Auflösung erfordert wird, wird unmittelbar durch Beobachtungen gefunden. Man könnte sie auch leicht auf die Dämmerung anwenden, wenn es bewiesen wäre, daß sie lediglich von einem bloßen Zurückwerfen des Lichts herrührte, und die Theilchen der Luft, welche sich an den Grenzen der Athmosphäre befinden, noch so viel davon zurückwürfen, daß wir sie so gleich gewahr werden könnten, so bald sie sich am Horizonte zeigte. Denn wenn man annimmt, die Sonne sey bei dem Anfang der Dämmerung 19 Grad unter dem Horizont, so findet man, daß diese 19 Grad der Sonne der dreifachen horizontalen Strahlenbrechung, und dem Winktl BCt zweimal genommen, gleich sind. Nimmt man demnach 33′ für die horizontale Strahlenbrechung an, so ist der Winkel

$$BCt = \frac{19^\circ - 1^\circ\, 39'}{2} = 8^\circ\, 40'\, 30''$$

Die Höhe der Luft ist also

$$v \text{ Sec. } 8^\circ\, 40'\, 30''$$

Setzt man nun v auch hier $= 10{,}0003054$ so bekommt man

$$CB = 1{,}01158$$

so daß die Höhe der Luft, welche das Licht noch zurück wirft, ohngefähr der $\frac{1}{80}$ Theil des Halbmessers der Erde wäre.

2. Anmerkung.

§. 134. Man kann auch diese Aufgabe umkehren, und aus der gegebenen Lage des Puncts F die Strahlenbrechung bestimmen. In dieser Absicht betrachtet man die Athmosphäre als ein caustisches Mittel, dessen Brennpunct F ist. Man darf dabei aber nicht die ganze Krümmung BAE in Betrachtung ziehen, sondern man kann die Hälfte davon nehmen, welches denn den Brennpunct weiter hinaus setzt. Daferne die Strahlen, welche in verschiedenen Entfernungen von der Axe DC in die Athmosphäre fallen, sich in Brennpuncte vereinigen, die von dem Mittelpunct C ungleich weit entfernt sind, so kann man durch Hülfe der gegebenen Strahlenbrechungen so viel man will, bestimmen, und alsdenn die darzwischen liegende Brennpuncte leicht finden, weil diejenigen, in denen die Strahlen zusammen kommen, welche der Axe DC sehr nahe sind, sich dem Mittelpunct C in der Verhältniß des Cosinus des Winkels r oder des Sinus der Einfallswinkel auf die Oberfläche A nähern.

15. Aufgabe.

§. 135. Es wird der scheinbare Erhöhungswinkel eines Berges und seine horizon-

tale Entfernung gegeben; man soll seine wahre Höhe finden.

Auflösung.

Es sey A der Ort, wo die Beobachtung angestellt wird (Fig. 6.). B der Gipfel des Berges. Der Winkel HAG oder der scheinbare Abstand vom Zenith ist bekannt, und der Winkel ACB ebenfalls, denn dieser drückt die Horizontalweite des Berges vom Punct A aus. Setzt man nun den horizontalen Halbmesser = 7, und

$$BC : \text{Sin.} (CAG - \tfrac{1}{14} ACB) = AC : \text{Sin.} (FBC - \tfrac{1}{14} ACB)$$

so bekommt man

$$BC = \frac{AC \,\text{Sin.} (CAG - \frac{1}{14} ACB)}{\text{Sin.} (FBC - \frac{1}{14} ACB)}$$

Anders.

Man suche die Entfernung CG, welche

$$= AC. \frac{\text{Sin. } HAG}{\text{Sin.} (HAG - ACB)}$$

ist, und ziehe davon die Entfernung GB ab, um die der Berg höher zu seyn scheint, welche

$$= \tfrac{1}{7}. (\text{Sec. } ACB - AC) \text{ Cosec. } HAG$$

ist (§. 113. 115.).

1. Anmerkung.

§. 136. Wenn die Horizontalweite in Toisen ausgedrückt wird, so findet man die Größe $\frac{1}{7}$ (Sec. ACB — AC) in der obigen Tafel.

Und da der Winkel HAG meistentheils nur um einen oder zwei Grad von einem rechten Winkel unterschieden ist, so kann man die Cosecante desselben = 1 setzen, so daß alsdenn die Höhe GB = $\frac{1}{7}$ (Sec. ACB — AC) angenommen werden kann, die sich denn unmittelbar in der vorigen Tafel zeiget (§. 124.).

2. Anmerkung.

§. 137. Die zweite Auflösung giebt ein Mittel an die Hand, bei den Höhen der Berge, die man bishero gemessen hat, ohne dabei die Strahlenbrechung mit in Betrachtung zu ziehen, die gehörigen Verbesserungen anzubringen, und man hat dazu weiter nichts nöthig, als die Weite in der sie gemessen worden.

Ich werde hiervon einige Beispiele geben, und darinnen bei den Höhen der meisten Berge, die sich in der oben (§ 120.) angeführten Schrift des Herrn Caßini befinden, einige Verbesserungen vornehmen müssen. Es ist in der That der Mühe werth, daß man ihre Höhe etwas genauer zu bestimmen suche, weil verschiedene Beobachtungen, welche man über die Vertiefung der Meeresfläche und die Barometer Höhen angestellt hat, davon abhängen. Man wird daraus sehen, warum die Hypothesen, welche man bei den Barometer Höhen angenommen hatte, niemals mit der Erfahrung übereinstimmen wollten, indem in der That einige von den Höhen dieser Berge 40 bis

50 Toisen zu gros, andre hingegen fast um eben so viel zu klein angenommen worden. Wenn man dahero auch setzen wollte, die Barometer Höhen wären nicht der mindesten Irregularität unterworfen, so wäre es dennoch unmöglich gewesen, sie mit den Höhen der Berge, die so unzuverläßig bestimmt worden, zusammen zu reimen.

Beispiele.

§. 138. Ich nenne in der Folge die Horizontalweite des Berges von dem Ort der Beobachtung = D, die Höhe des Berges über die wagerechte Fläche eben dieses Orts, so wie sie der Herr Caßini bestimmt hat, ohne dabei auf die Strahlenbrechung zu sehen, A, den Unterschied GB = R, und die wahre Höhe H = AH so daß

$$A - R = H$$

ist. Weil nun die Weite D gegeben wird, so sucht man dieselbe in der zweiten Columne der Tafel auf §. 124, und denn findet sich in der ersten Columne der Unterschied R.

I. Beobachtung am nördlichen Standpunct.

Der Canigou	A =	1441,0 Toisen
D = 28767	R =	18,0
Die Höhe des Berges Canigou über die Meeresfläche.		1423,0

Der Berg Mousset	A =	1253,0
D = 35145	R =	27,0
	H =	1226,0

II.

II. Beobachtung zu Collioure.

Mattelotte	D = 2228.	H = 336,4
Massanne	D = 3046	H = 408,3
St. Elme	D = 675	H = 101,5

III. Beobachtung zu St. Elme.

Der Canigou	A = 1442,0
D = 26912	R = 16,0
	H = 1426,0
Nach der ersten Beobachtung aber war der Werth von	H = 1423,0
Also ist die mittlere Höhe	= 1424,5
Der Bugarach	A = 650,5
D = 35936	R = 28,3
	H = 622,2
Matelotte D = 1800	H = 334,5
Aus der zweiten Beobachtung	H = 336,4
Mittlere Höhe von dem Matelotte	335,4

IV. Beobachtung zu Perpignan auf dem Turm St. Jacob.

Der Canigou	A = 1398,0
D = 21445.	R = 10,
	H = 1388,0
Höhe des Canigou über die Meeresfläche	= 1424,5
Folglich der Turm von St. Jacob	= 36,5

Der Bujarach	A = 610,6
D = 23946.	R = 12,5
	H = 598,1
Höhe des Turms von St. Jacob über das Meer	= 36,5
Höhe des Bugarachs über das Meer	= 634,6
Nach der 3. Beobachtung war dieselbe	= 622,2
Folglich ist die mittlere Höhe des Bugarachs	= 628,4

V. Beobachtung zu Tautavel.

Der Canigou	A = 1184,0
D = 20812.	R = 9,6
	H = 1174,4
Höhe des Conigou über die Meeresfläche	= 1424,5
Höhe von Tautavel über das Meer	= 250,1
Der Mousset	A = 994,0
D = 24600.	R = 13,2
	980,8
Der Mousset über die Meeresfiäche	= 1226,0
Tautavel	= 45,2
oder umgekehrt die mittlere Höhe des Mousset	= 1228,0

VI. Beobachtung zu Magrin.

Der Canigou	A =	1364,0
D = 66700	R =	97,2
	H =	1266,8
Der Canigou über die Meeresfläche	=	1424,5
Höhe von Magrin über die Meeresfläche	=	157,7
Der Puy Laurent	A =	20,0
D = 4530	R =	0,5
	H =	19,5
Höhe von Magrin	=	157,7
Höhe des Puy Laurent	=	177,2

VII. Beobachtung auf dem Gipfel des Puy Laurent.

Rupeyroux	A =	310,5
D = 43521	R =	41,4
	H =	269,1
Die Höhe des Puy Laurent	=	177,2
Höhe von Rupeyroux	=	446,3

VIII. Beobachtung zu Rupeyroux.

Der Cantal	A =	585,5
D = 47665.	R =	49,6
	H =	535,9
Höhe von Rupeyroux	=	446,3
Höhe des Cantal	=	982,2

Der Puy-Violent	A =	452,5
D = 48785	R =	52,0
	H =	400,5
Höhe von Rupeyroux	=	446,3
Höhe des Puy-Violent	=	846,8

IX. Beobachtung zu Rhodes.

Rupeyroux	A =	89,0
D = 14228.	R =	4,5
	H =	84,5
Höhe von Rupeyroux	=	446,3
Höhe von Rhodes	=	361,8

X. Beobachtung zu Bastide.

Cantal	A =	562,0
D = 28954	R =	18,4
	H =	543,6
Höhe des Cantal	=	982,2
Höhe von Bastide	=	438,6
La Courlande	A =	415,0
D = 45780	R =	110,4
	H =	365,6
Höhe von Bastide	=	435,7
La Courlande	=	801,3
La Coste	A =	428,0
D = 51637	R =	56,3
	H =	371,7
Höhe von Bastide	=	435,7
Höhe des La Coste	=	807,4

Der Mont d'or	A =	617,0
D = 48588	R =	51,6
	H =	565,4
Höhe von Bastide	=	435,7
Höhe des Mont d'or	=	1001,1

X. Beobachtung auf dem Lage Chevalier.

Der Mont d'or	A =	716,0
D = 49228	R =	53,0
	H =	663,0
Höhe des Mont d'or	=	1001,1
Höhe des Lage Chevalier	=	338,1
Der Puy de Dome	A =	485,0
D = 39556	R =	34,2
	H =	450,8
Höhe des Lage-Chevalier	=	338,1
Des Puy de Dome	=	788,9

Bey den dreien ersten Beobachtungen bedeuten die Buchstaben A, H die absoluten Höhen der Oerter über das Meer, bey allen übrigen aber behalten sie die Bedeutung, welche ich ihnen zu Anfang des Paragraphen gegeben habe.

Anmerkung.

§. 139. Der Berg St. Barthelemi, dessen ich bey der vorigen Rechnung gar nicht erwehnet, ist an vier Orten gemessen worden, bey den nördlichen Standpunkt, zu Rupeyroux, zu Magrin, und auf dem Puy-Laurent. Es

kommt mir aber vor, als wenn sich dabey ein Irthum eingeschlichen hat.

Allen Ansehen nach hat man an den beyden ersten Orten nicht eben den Gipfel dieses Berges gemessen, den man an den beyden letzten beobachtet hat. Denn die Messungen sind um 100 Toisen unterschieden, und der Berg selbst ist sehr groß und hat verschiedene Spitzen, wie solches die Figur, welche der Hr. Caßini davon gegeben, 1 T. VII. C. 3. A. anzeiget.

Die Rechnung darüber würde folgende seyn:

I. Beobachtung am nördlichen Standpunct.

Der St Barthelemi	A =	1184,5
D = 52420	R =	60,0
Die Höhe	H =	1124,5

II. Beobachtung zu Rupeyroux.

Der St. Barthelemi	A =	846,8
D = 87740	R =	168,4
	H =	678,4
Höhe von Rupeyroux	=	446,3
Höhe der St. Barthelemi	=	1124,7
Folglich ist die mittlere Höhe, die aus diesen Beobachtungen folgt	=	1124,6

III. Beobachtung zu Magrin.

Der St. Barthelemi	A =	1107,5
D = 46264	R =	46,8

	H =	1060,7
Höhe von Magrin	=	157,7
Höhe des St. Barthelemi	=	1218,4

IV. Beobachtung auf dem Puy-Laurent.

Barthelemi	A =	1098,0
D = 44233.	R =	42,8
	H =	1055,2
Höhe des Puy Laurent	=	177,2
Höhe des St. Barthelemi	=	1232,4
Aus diesen zweyen Beobachtungen würde demnach die mittlere Höhe des St. Barthelemi	=	1225,4

Alle diese gefundene Höhen der Berge will ich nunmehro in einer Tafel zusammen fassen, und darneben die Barometerhöhen, so wie man sie beobachtet hat, auf die mittlere heruntersetzen, indem man die Höhe des Barometers am Ufer des Meeres 28 Zoll annimmt.

Tafel.

Nahmen der Berge.	Ihre Höhe nach dem Hrn. Caßini in Toisen	Verbesserte Höhe in Toisen.	Höhe des Barometers.
De Camjou.	1441,5	1224,5	20″. 0‴ $\frac{1}{2}$
Mousset.	1253,0	1228,0	20 . 10$\frac{2}{3}$
Matelotte.	335,5	335,4	
Massanne.	408,5	408,3	25 : 4
St. Elme.	101,5	101,5	
Der Bujarach.	650,5	628,4	24 : 1$\frac{1}{2}$
St. Jacob zu Perpignan.	41,5	36,5	
Tautavel.	258,0	245,2	
Magrin.	77,0	157,7	
Der Puy Laurent.	97,0	177,2	
Rupeyroux.	407,5	446,3	25 . 1$\frac{1}{2}$
Cantal.	993,0	982,2	
Puy de Violent.	860,0	846,8	
Rhodes.	318,5	361,8	25 . 8
La Bastide.	431,5	438,6	
La Courlande.	846,0	801,8	23 . 2
La Coste.	859,0	807,4	23 . 2
Der Mont d'or.	1048,0	1001,3	
Der Lage Chevalier.	332,0	338,3	
Puy de Dome.	817,0	789,1	23 . 2$\frac{1}{2}$
Der St. Barthelemi.	1189,2	1225,4	21 . 0$\frac{1}{2}$

Anmerkung.

§. 140. Wenn man diese Höhen mit einander vergleicht, so sieht man, daß einige, als von Matelotte, Massanne, St. Elme, Tautavel, ꝛc. nicht sehr viel von einander abweichen, hingegen sind die von Magrin und dem Puy-Laurent 80 Toisen größer, als sie Hr. Caßini angiebt, und daß die von dem La Courlande, La Coste, Mont d'or, 30 bis 40 Toisen kleiner angenommen werden müssen, wenn man statt der Höhe, welche Caßini gefunden, die wahre haben will. Es findet sich aber dabey noch etwas, das mich nicht wenig befremdete, nämlich daß die Barometerhöhen mit den verbesserten Höhen der Oerter vollkommen übereinstimmen.

Denn wenn man die ersten für Abscissen, und die andern als die dazu gehörige Applicaten ansieht, so bestimmt man dadurch einer krummen Linie.

Indem ich diese krumme Linie durch diese gegebene Puncte ziehen wollte, so wurde sie so regulär, daß man hätte glauben sollen, man hätte schon vorhero die Natur dieser krummen Linie gekannt, und dahero die Puncte genau dahin gezeichnet, wo man wußte, daß die Linie durchgehen mußte: denn in der That betrug der Unterschied nur wenige Toisen. Diese unerwartete Uebereinstimmung bewog mich, eine Formel dazu zu suchen, und nach dieser habe ich nachstehende Tafel für die Höhen der Oerter

über die Meeresfläche, und den mittleren Barometerhöhen, die dazu gehören, berechnet. Ich behalte mir vor, bey einer andern Gelegenheit die Formel selbst zu geben, und zugleich die Methode zu zeigen, nach der ich sie gefunden habe, und lasse es jetzt bey der Tafel bewenden, aus der man selbst sehen kann, wie weit die Erfahrungen, welche im vorigen Paragraphen angeführt worden, mit denselben zusammen treffen. Man hat noch andre Beobachtungen von den Barometerhöhen auf verschiedene andre Berge, als auf dem Clairet in Provence, auf Notre Dame de la Garde, und auf verschiedenen andern. Da ich aber jetzt nicht Gelegenheit habe, die Höhe dieser Berge zu berichtigen, so habe ich bloß diejenigen angeführt, von denen ich alle dabey vorkommende Umstände durch die Musterung gehen lassen konnte. Will man ähnliche Beobachtungen mit dem Barometer anstellen, so muß man Tage wählen, an denen die Luft stille ist, und das Barometer sich in seiner mittlern Höhe befindet, und sich nicht von einem Tage zum andern merklich verändert hat. Diese Umstände sind am geschicktesten, das Fallen des Quecksilbers mit einiger Genauigkeit zu bestimmen.

Tabelle
Der Barometer Höhen für die ihnen entsprechende Höhen über die Meeres-Fläche.

Höhe des Barometers	Höhen der Oerter.	Barometer.	Höhen.	Barometer.	Höhen.
E. L.		E. I			
27°. 11	12, 0	24°. 8	529, 8	21. 5	1136, 4
10	24, 1	7	544, 3	4	1153, 2
9	36, 3	6	558, 8	3	1170, 1
8	48, 6	5	573, 4	2	1187, 1
7	60, 9	4	588, 0	1	1204, 1
6	73, 3	3	602, 7	21. 0	1221, 2
5	85, 7	2	617, 4	20. 11	1238, 4
4	98, 2	1	632, 1	10	1255, 6
3	110, 8	24. 0	646, 9	9	1272, 9
2	123, 3	23. 11	661, 8	8	1290, 3
1	136, 0	10	676, 8	7	1307, 5
27. 0	148, 7	9	691, 8	6	1325, 2
26. 11	161, 4	8	706, 8	5	1342, 7
10	174, 4	7	721, 9	4	1360, 4
9	187, 4	6	737, 1	3	1378, 2
8	200, 4	5	752, 3	2	1396, 0
7	213, 4	4	767, 6	1	1413, 9
6	226, 5	3	783, 0	20. 0	1431, 8
5	239, 7	2	798, 4	19. 11	1449, 8
4	252, 9	1	813, 9	10	1467, 9
3	266, 2	23. 10	829, 5	9	1486, 1
2	279, 6	22. 11	845, 0	8	1504, 4
1	293, 1	10	860, 0	7	1522, 8
26. 0	306, 6	9	876, 4	6	1541, 2
25. 11	320, 1	8	892, 2	5	1559, 7
10	333, 7	7	908, 1	4	1578, 3
9	347, 3	6	924, 0	3	1597, 0
8	361, 1	5	940, 0	2	1615, 7
7	374, 8	4	956, 1	1	1634, 5
6	388, 7	3	972, 2	19. 0	1652, 5
5	402, 5	2	988, 3	18. 6	1768, 0
4	416, 5	1	1004, 4	18. 0	1887, 4
3	430, 5	22. 10	1020, 8	17. 6	2009, 3
2	444, 6	21. 11	1037, 1	17. 0	2134, 8
1	458, 7	10	1053, 5	16. 6	2264, 0
25. 0	472, 8	9	1069, 9	16. 0	2394, 3
24. 11	487, 0	8	1086, 4	15. 6	2534, 9
10	501, 2	7	1103, 0	15. 0	2677, 0
9	515, 5	6	1119, 7	14. 6	2824, 0
8	529, 8	5	1136, 4	14. 0	2976, 2

Aus folgender Tafel kann man nun sehen, wie weit die Rechnung mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Nahmen der Oerter.	Mittlere Höhe des Barometer.	Berechnete Höhe in Toisen.	Gemessene Höhe nach Toisen.	Unterschied.
	Z. L.			
Rhodes	25, 8	361, 1	361, 8	− 0, 7
Massanne	25, 4	416, 5	408, 3	+ 8, 2
Rupeyroux	25, 1½	451, 5	446, 3	+ 5, 2
Bugarach	24, 1½	624, 7	628, 4	− 3, 7
Puy de Dome	23, 2½	790, 7	789, 1	+ 1, 6
La Coste	23, 2	798, 4	807, 4	− 9, 0
La Courlande	23, 2	798, 4	801, 3	− 2, 9
St. Barthelemi	21, 0½	1212, 6	1225, 4	− 12, [illegible]
Mousset	20, 10½	244, 8	1228, 0	+ 16, 8
Der Cangion	20, 0½	422, 9	1424, 5	− 1, 6

Man sieht hieraus, daß der Unterschied allezeit kleiner ist, als eine Linie. Ich muß aber noch anmerken, daß die Barometerhöhen auf den Bergen Mousset und St. Bartelemy, deren Unterschied am größten ist, ungewiß sind, und zwar deswegen, weil ich die Höhe des Barometers an der See oder zu Paris für die Zeit, da diese Beobachtungen gemacht wurden, nicht habe finden können.

Man fand die Höhe des Barometers auf dem pico di tanariffa 125 Linien kleiner, als am Ufer der See. Da nun die mittlere Höhe 17 Zoll 7 Linien ist, so fand ich die Höhe des pico 1989,2 Toisen, und ich zweifle nicht, daß sie nicht die wahre seyn sollte. Denn obgleich der Pater Feuillee diese Höhe maß, und sie von 13158 Fuß oder 2193 Toisen fand, so scheint es doch, daß er nicht allein die Strahlenbrechung aus der Acht gelassen, sondern sich auch zweyer Stationen bedienet habe, welches denn den Fehler, der durch die Strahlenbrechung entstehet, verdoppeln würde. Hr. Bougver setzt die Höhe des Pico auf 12312 oder 12252 Fuß. Ich weiß nicht, auf welche Art diese Höhen gefunden worden. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß es an den beyden äußern Puncten eines Triangels geschehen, der die Entfernung des Berges bestimmen sollte, und dessen Seiten ungleich weit davon entfernt waren.

Die Höhe, welche aus der kleinsten Seite gefunden wird, und 12258' Fuß oder 2043 Toi-

sen ist, ist von der, welche ich durch meine Rechnung heraus bringe, nur um 52 Toisen unterschieden. Dieses kann sehr leicht von der Strahlenbrechung herrühren, weil dazu bloß eine Entfernung von 50000 Toisen erfordert wird, und so groß muß sie auch wenigstens seyn, wenn man die Spitze des Berges sehen will.

Anmerkung.

Die Formel, welche der Herr Verfasser hier zu geben verspricht, findet sich in seiner Abhandlung von den Barometerhöhen und ihren Veränderungen in dem 3ten Bande der Churfürstl. Bayerischen Academie. Wenn nämlich die Höhe des Barometers am Ufer der See = a Linien und in der Höhe x = y Linien ist, und diese Höhe wird in Toisen ausgedruckt, so wird

$$x = 10000 \text{ Log. } \frac{a}{y} - \frac{43(336-y)}{43+(336-y)}.$$

Man findet in eben erwehnter Schrift einige Erinnerungen, welche den Gebrauch dieser Formel betreffen. Wenn es nur darauf ankommt, die Höhe der Berge beyläufig zu wissen, so dient folgende Tafel, einige Verbesserungen anzubringen.

Monath	Verhältnis	Monath	Verhältniß.
Januar.	1000	Julius.	1047
Februar.	1003	August.	1043
März.	1010	Septbr.	1036
April.	1019	Octob.	1027
May	1029	Novebr.	1016
Junius	1038	Decemb.	1007

Diese Tafel wird auf folgende Art gebraucht. Wenn man die Höhe eines Orts über die Meeresfläche wissen will, so nimmt man die mittlere Höhe des Barometers in einem gewissen Monathe, und berechnet dieselbe nach der gegebenen Formel, indem man für y diese mittlere Höhe setzt. So dann muß die gefundene Höhe nach Verhältniß der Zahl, die in dieser Tabelle neben dem Monath steht, zu 1000 vergrößert werden. Hat man z. B. die mittlere Höhe vom Augustmonath genommen, so wird die daraus gefundene Höhe des Orts in der Verhältniß von 1000 zu 1043 vergrößert.

Wer das Mariottische Gesetz kennt, der sieht leicht, daß es das vornehmste Stück in der Formel ausmacht, und daß die dabey angebrachte Verbesserung nur eine Kleinigkeit ist, welche durch viele Erfahrungen bestimmt worden. Mariotti hätte also wohl etwas mehr Nachsicht verdient, die Caßini und Maraldi nicht hatten, sondern das Gesetz, auf dessen Erfindung ihn doch Erfahrungen brachten, ohne Umstände ver=

warfen; und warum? Um nun eine neue Regel festzusetzen, die sich mit ihren Messungen besser zusammenreimte, allmählig aber dennoch anfing zu wanken, und endlich aller ihrer Festigkeit und der Mühe ohnerachtet, die sich ihre Erfinder und Anhänger gaben, sie aufrecht zu erhalten, von der Erfahrung kurz weg umgeworfen wurde. So sahen noch Frankreichs gelehrte Söhne Welten in Certesianische Wirbel, wenn Neutons Philosophie schon den übrigen Theilen von Europa die Geheimnisse der Natur offenbahrt hatte!

Tab. 1.

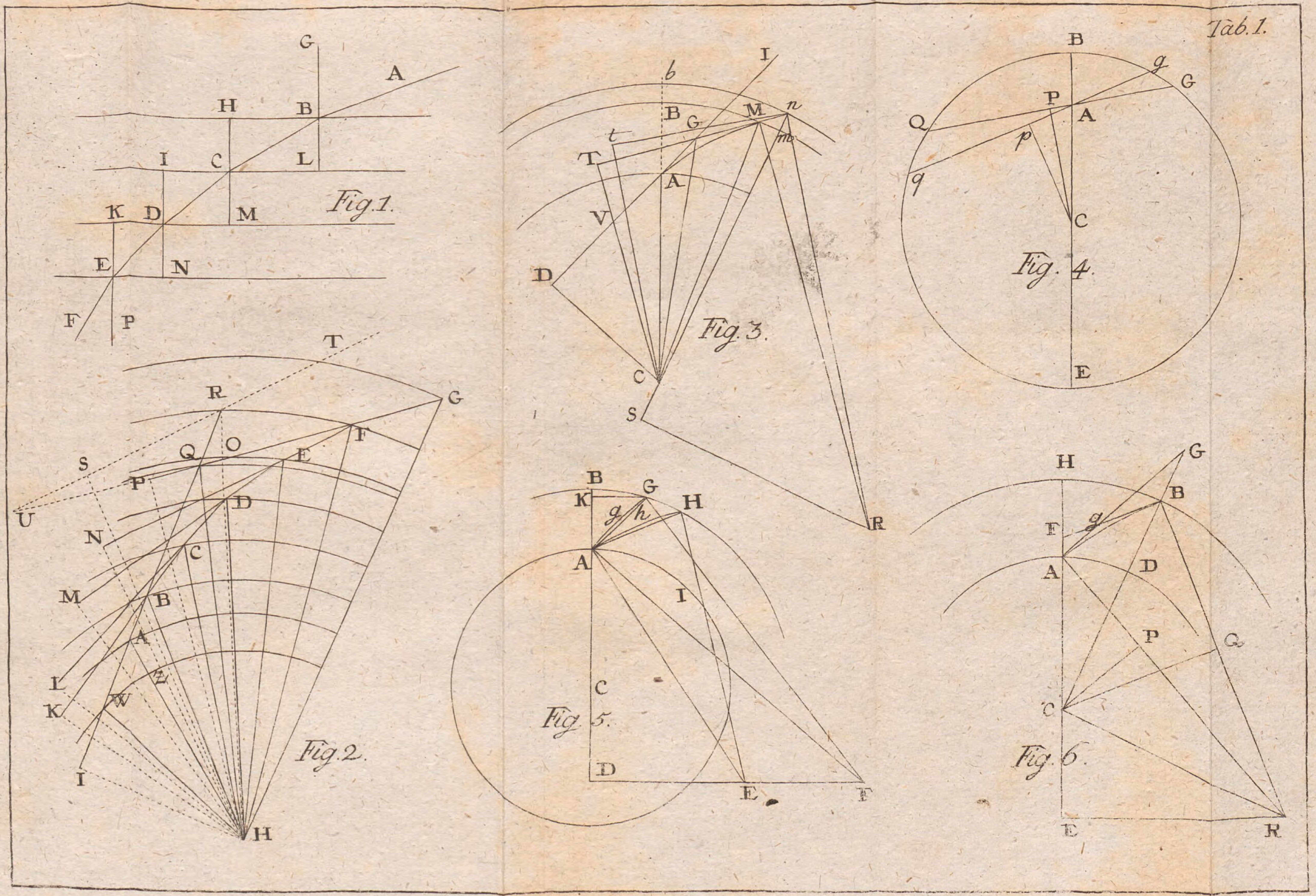
Fig. 1.
G A H B I C L K D M E N F P
Fig. 2.
T R G S Q O F E P U D N C M B A L Z K W I H
Fig. 3.
b I B M n G t m T A V D C S R
Fig. 4.
B g G P Q A p q C E
Fig. 5.
B G K H g h A I C D E F
Fig. 6.
H G B F g A D P Q C E R

Tab. 2.

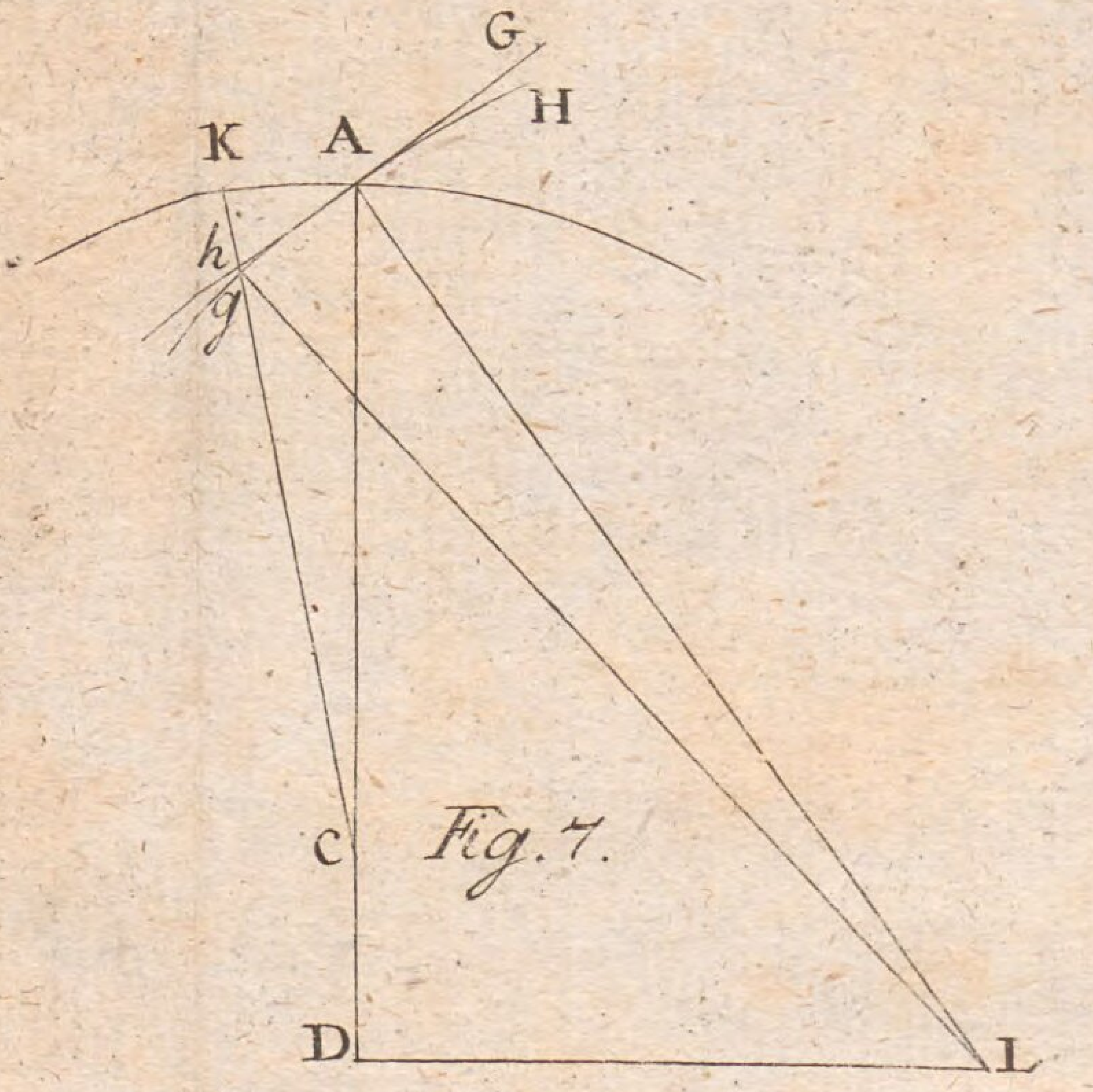

Fig. 7.

Fig. 10.

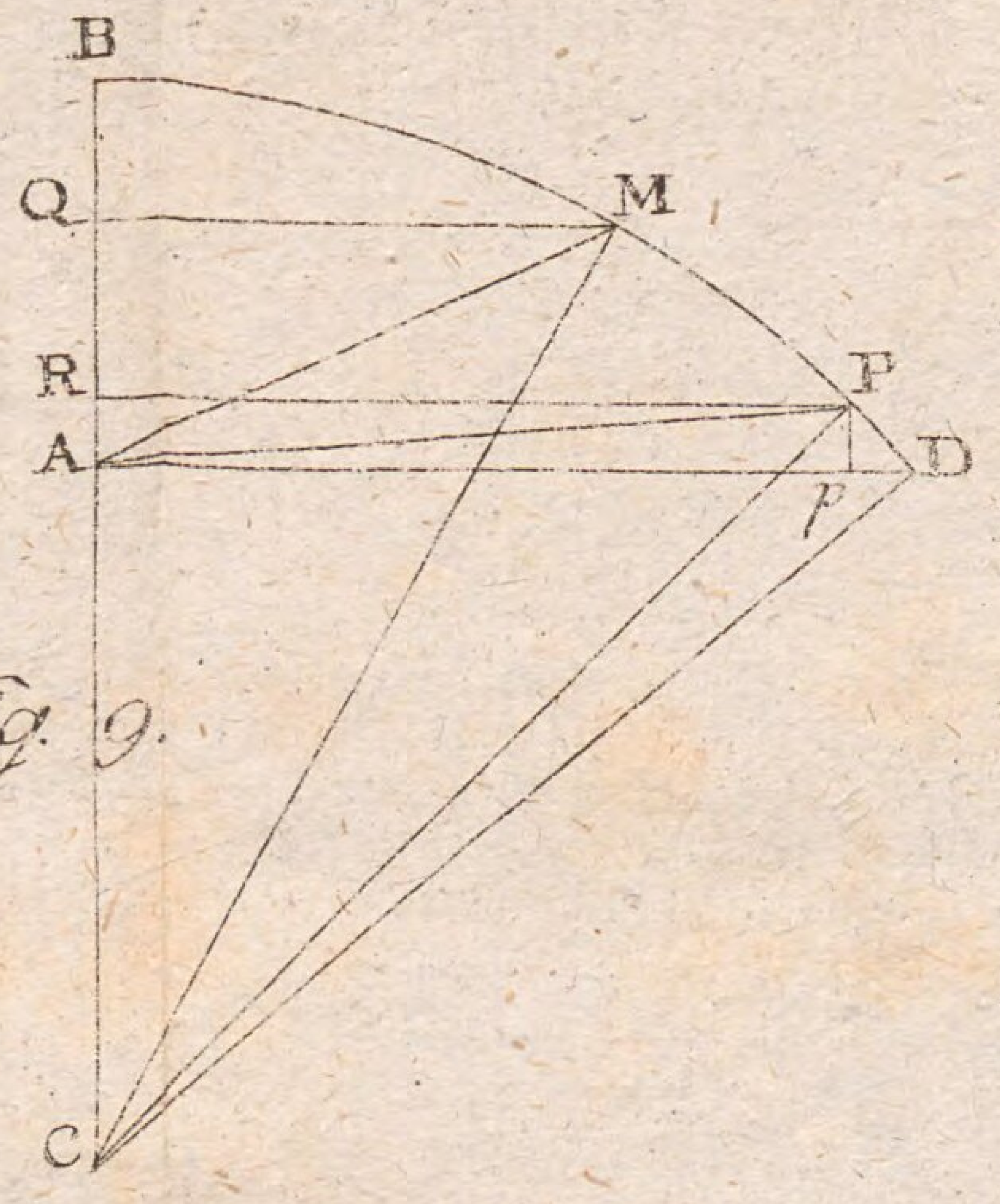

Fig. 9.

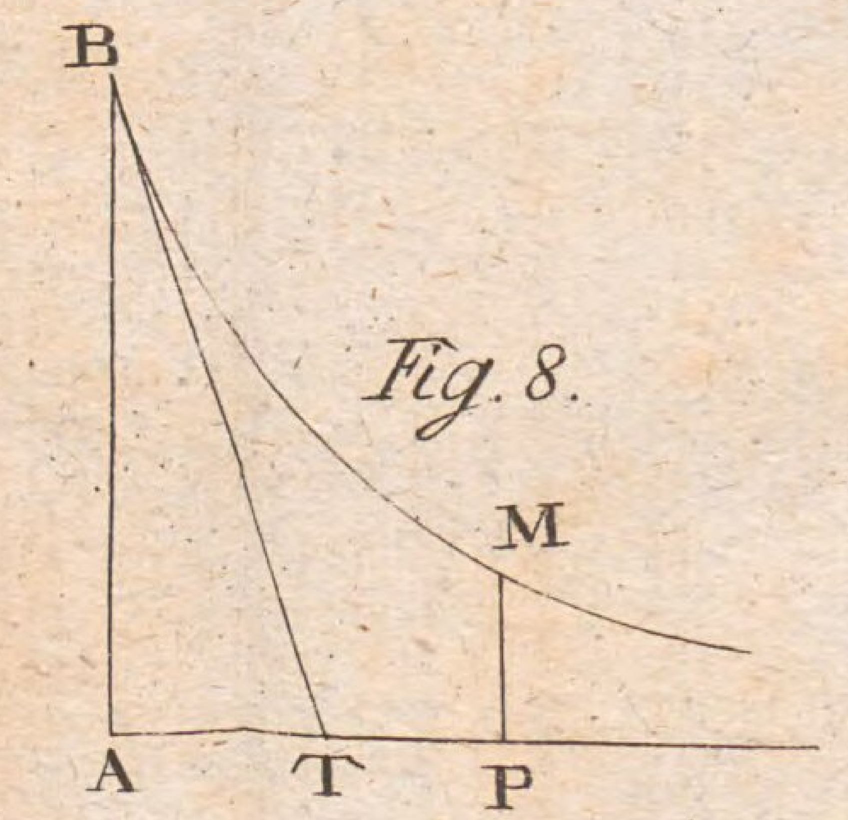

Fig. 8.

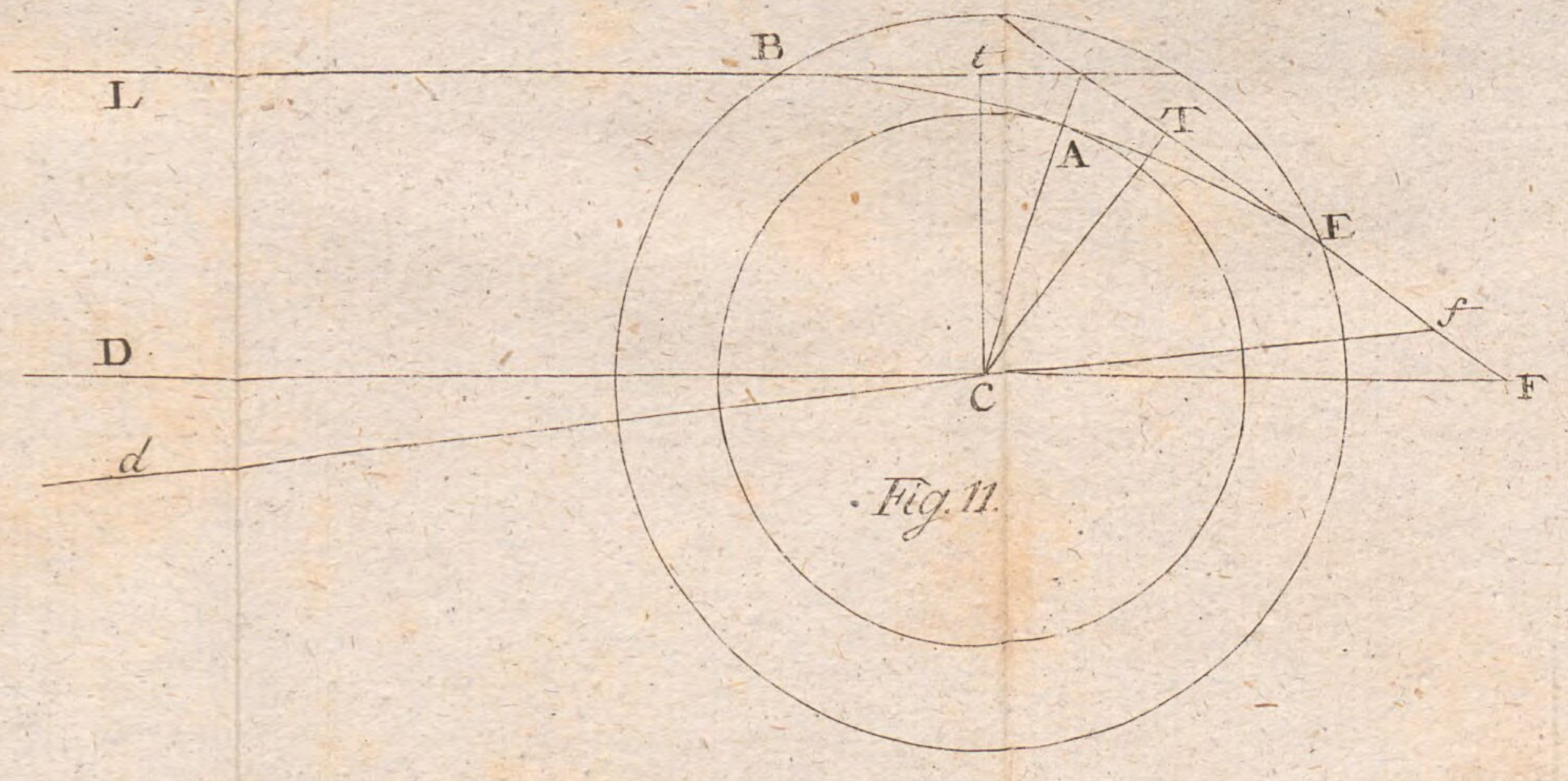

Fig. 11.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lambert, Johann Heinrich,

Merkwürdigste Eigenschaften der Bahn des Lichts durch die Luft und ü
berhaupt durch verschiedene sphärische und concentrische Mittel nebst der
Auflösung verschiedener Aufgaben, welche sich darauf beziehen, als die
astronomische und Erdstrahlenbrechnung und was davon abhängt

Berlin 1772

Phys.sp. 366
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10134109-7
VD18 12063045-001